José Ignacio Ramos

ACADEMIA EPSILON

Ana Isabel Moreno

MATEMÁTICAS

2º BACHILLERATO

Academia EPSILON.

Uríbarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94.

Tabla de derivadas

$y = f + g \Rightarrow y' = f' + g'$.

$y = a \cdot f \Rightarrow y' = a \cdot f'$ (a = constante).

$y = f \cdot g \Rightarrow y' = f' \cdot g + g' \cdot f$.

$y = \dfrac{f}{g} \Rightarrow y' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}, \forall n$; .... $y = f^n \Rightarrow y' = nf^{n-1} \cdot f'$.

$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; .... $y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

$y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$; .... $y = \sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$.

$y = Lx \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$; .... $y = Lf \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{f}$.

$y = \log_b x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\log_b e$; .... $y = \log_b f \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{f}\log_b e$.

$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$; .... $y = e^f \Rightarrow y' = e^f \cdot f'$.

$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot La$; .... $y = a^f \Rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot La$.

$y = f^g \Rightarrow Ly = g\,Lf \Rightarrow y' = \left(g'\,Lf + \dfrac{f'}{f} \cdot g\right) f^g$.

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$; .... $y = \sin f \Rightarrow y' = f' \cos f$.

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$; .... $y = \cos f \Rightarrow y' = -f' \sin f$.

$y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$; .... $y = \tan f \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{\cos^2 f} = (1 + \tan^2 f) \cdot f' = \sec^2 f \cdot f'$.

$y = \cot x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$; $y = \cot f \Rightarrow y' = \dfrac{-f'}{\sin^2 f} = -(1 + \cot^2 f) \cdot f'$.

$y = \sec x \Rightarrow y' = \tan x \cdot \sec x$; .... $y = \sec f \Rightarrow y' = f' \tan f \cdot \sec f$.

$y = \csc x \Rightarrow y' = -\cot x \cdot \csc x$; .... $y = \csc f \Rightarrow y' = -f' \cot f \cdot \csc f$.

$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; .... $y = \arcsin f \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$.

$y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$; .... $y = \arccos f \Rightarrow y' = -\dfrac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$.

$y = \arctan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$; .... $y = \arctan f \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{1 + f^2}$.

$y = \text{arc cot } x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$; .... $y = \text{arc cot } f \Rightarrow y' = -\dfrac{f'}{1 + f^2}$.

$y = \text{arc sec } x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; .... $y = \text{arc sec } f' \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{f\sqrt{f^2 - 1}}$.

$y = \text{arc csc } x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; .... $y = \text{arc csc } f \Rightarrow y' = -\dfrac{f'}{f\sqrt{f^2 - 1}}$.

$y = u \cdot v\, w \;\; \Rightarrow y' = u'v\,w + u\,v'w + u\,v\,w'$

TABLA DE INTEGRALES.

ACADEMIA *EPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

1. $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C.$

3. $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$

7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln(\cos x) + C.$

8. $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$

9. $\int e^x dx = e^x + C.$

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C.$

ESTUDIO DE UNA FUNCION.

$$y = \frac{x^2}{2-x}.$$

1.) DOMINIO $\longrightarrow$ $D: \mathbb{R} - \{2\}$

2.) PUNTOS DE CORTE $\longrightarrow$ $\begin{cases} x=0 \longrightarrow y = \dfrac{0^2}{2-0} = 0 \longrightarrow P(0,0) \\ y=0 \longrightarrow 0 = \dfrac{x^2}{2-x} \longrightarrow 0 = x^2 \end{cases}$

3.) SIMETRIAS $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Simetría par: } f(x) = f(-x) \\ \quad \text{" impar: } -f(x) = f(-x) \end{array}}$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2-(-x)} = \frac{x^2}{2+x}$$

$$-f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2-x} \\ \dfrac{x^2}{-2+x} \end{cases}$$

No hay simetrías

4.) MAX., MIN., CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO.

$$y' = \frac{2x\cdot(2-x) - x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 4x - x^2 = 0 \longrightarrow x\cdot(4-x) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=4. \end{cases}$$

DECR. ($-$) | CR. ($+$) | DECR. ($-$)

$-\infty$ ... 0 ... 4 ... ∞

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = - \\ f'(3) = + \\ f'(5) = - \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} MIN\ (0,\ 0) \\ MAX\ (4,\ -8) \end{cases}$$

$f(0)$ · $f(4)$

5.) PUNTOS DE INFLEXION, CONCAVA, CONVEXA.

$$y'' = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^{\cancel{2}} - (4x-x^2)\cdot 2\cdot(\cancel{2-x})(-1)}{(2-x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8 - 4x - 4x + 2x^2 + (8x - 2x^2)}{(2-x)^3}$$

$$= \frac{8 - \cancel{8x} + \cancel{2x^2} + \cancel{8x} - \cancel{2x^2}}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3} = 0 \longrightarrow 8 \neq 0 \rightarrow \emptyset$$

CONC. ($+$) | CONV. ($-$)

$-\infty$ ... 2 ... ∞

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = + \\ f''(3) = - \end{array}\right\} \longrightarrow \cancel{P.I.\ (2,\ \infty)}$$

$f(2)$

Se cojen también
...

6). ASINTOTAS.

* AS. VERTICALES → $\boxed{\text{Denominador} = 0}$

$$2 - x = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \frac{+}{-} = -\infty. \end{cases}$$

* AS. HORIZONTAL → $\boxed{y = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a x^m + \dots}{b x^n + \dots} \begin{cases} m > n \to \infty \\ m < n \to 0 \\ m = n \to \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$y = \lim \frac{x^2}{2-x} = \infty \quad (\text{No hay})$$

* AS. OBLICUA → $\boxed{y = mx + n \quad \begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]. \end{cases}}$

- Las asíntotas horizontal y oblicua son incompatibles.
- La asíntota oblicua existe si N > D en un grado

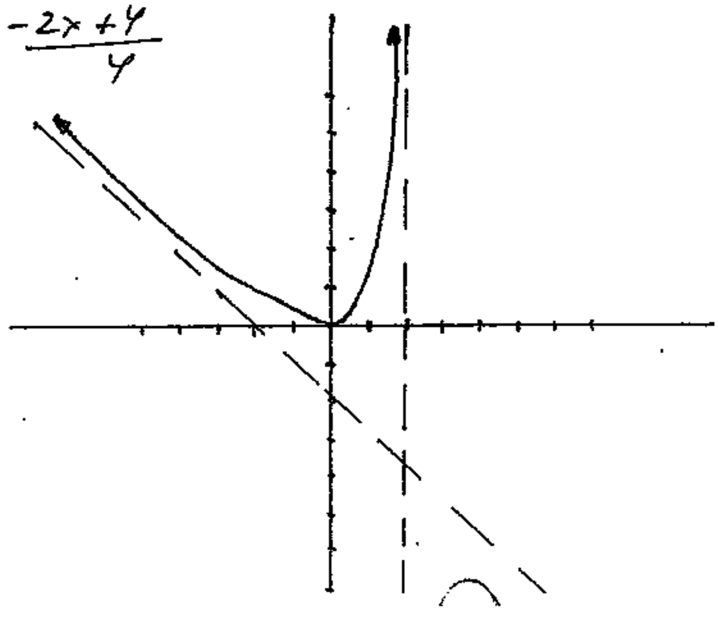
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim \frac{x^2}{2x - x^2} = -1. \longrightarrow y = -x - 2.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{2-x} - (-1) \cdot x \right] = \lim \left[\frac{x^2}{2-x} + x \right] = \lim \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{2-x} = \lim \frac{2x}{2-x} = -$$

→ Otra forma:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -x+2 \\ \hline -x^2+2x & -x-2 \\ / \quad 2x & \\ -2x+4 & \\ \hline 4 & \end{array} \longrightarrow y = -x - 2$$

Para representar la función dibujamos:
- Puntos de corte.
- Max. y min.
- Asíntotas.
- Miramos el crec. y decr. de izda a dcha



Academia ƐPSILON.
Uribarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94.

TEOREMAS DE MATEMATICAS.

CONTINUIDAD.

Se dice que una función f(x) es continua en un punto x_o, cuando:

$$\boxed{\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_0).}$$

DERIVABILIDAD.

Se dice que una función f(x) es derivable en un punto x_o, cuando:

$$\boxed{f'(x_o^+) = f'(x_o^-)}$$

TEOREMA DE ROLLE.

Se tiene que cumplir:

1°. Continua en [a,b].
2°. Derivable en (a,b).
3°. f(a) = f(b).

Cumpliendose estas condiciones buscamos un valor "c" tal que:

$$\boxed{f'(c) = 0} \qquad \forall \quad a < c < b.$$

TEOREMA DE LAGRANGE.

Se tiene que cumplir:

1°. Continua en [a,b].
2°. Derivable en (a,b).

Cumpliendose estas condiciones buscamos un valor "c" tal que :

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a) \, . \, f'(c)} \qquad \forall \quad a < c < b.$$

TEOREMA DE CAUCHY.

Se tiene que cumplir:

1°. f(x) que sea continua en [a,b].
2°. g(x) que sea derivable en (a,b).

Cumpliendose estas condiciones buscamos un valor "c" tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ACADEMIA ЄPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

ACADEMIA ЄPSILON.
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

Ecuación paramétrica de la recta, donde (a,b,c) es un vector y (x_1,y_1,z_1) es un punto:

$$x = x_1 + \lambda.a$$
$$y = y_1 + \lambda.b$$
$$z = z_1 + \lambda.c$$

Ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}.$$

Ecuación paramétrica del plano:

$$x - x_1 = \alpha.a + \lambda.a'.$$
$$y - y_1 = \alpha.b + \lambda.b'.$$
$$z - z_1 = \alpha.c + \lambda.c'.$$

Ecuación general del plano:

Desarrollando el determinante $\begin{vmatrix} a & a' & x-x_1 \\ b & b' & y-y_1 \\ c & c' & z-z_1 \end{vmatrix} = 0$, obtenemos: $Ax + By + Cz + D = 0.$

Posiciones relativas de 2 rectas:

Considerando los vectores de las rectas (a,b,c); (a′,b′,c′), y los pùntos (x_1,y_1,z_1); (x_2,y_2,z_2).

$a/a' = b/b' = c/c'$..las rectas son paralelas.

$M = \begin{vmatrix} a & a' & x_2-x_1 \\ b & b' & y_2-y_1 \\ c & c' & z_2-z_1 \end{vmatrix}$ si $M = 0$.....................las rectas se cortan.
si $M \neq 0$.....................las rectas se cruzan.

Posiciones relativas de dos planos:

Sean los planos: π_1: $Ax + By + Cz + D = 0.$
π_2: $A'x + B'y + C'z + D' = 0.$

$M = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$ y $M' = \begin{vmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \end{vmatrix}$

Condiciones: Si $R(M) = R(M') = 2$................se cortan en una recta.
Si $R(M) = R(M') = 1$..............son planos coincidentes.
Si $R(M) = 1$, $R(M') = 2$..........son planos paralelos.

Posiciónes relativas de 3 planos.

ACADEMIA *EPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

Sean los planos: π_1: $Ax + By + Cz + D = 0.$

π_2: $A'x + B'y + C'z + D' = 0.$

π_3: $A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$

$$M = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \quad y \quad M' = \begin{vmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{vmatrix}$$

Condiciones: Si $R(M) = R(M') = 3$.............se cortan en un punto.
Si $R(M) = R(M') = 2$..............se cortan en una recta.
Si $R(M) = R(M') = 1$..............los 3 planos son coincidentes.
Si $R(M) = 2;\ R(M') = 3$.........los planos se cortan 2 a 2.
Si $R(M) = 1;\ R(M') = 2$.........los planos son paralelos entre sí.

Posiciones relativas de recta y plano.

Sean:

$$r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b}. \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c}. \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

π: $Ax + By + Cz + D = 0.$

ACADEMIA EPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I MORET.
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 .
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

Desarrollando las 3 ecuaciones anteriores y poniendolas en forma de determinante como en casos anteriores tenemos las siguientes condiciones:

Si $R(M) = R(M') = 3$..............plano y recta se cortan en un punto.
Si $R(M) = R(M') = 2$..............la recta esta contenida en el plano.
Si $R(M) = 2;\ R(M') = 3$.........la recta es paralela al plano.

Recta perpendicular a un plano por un punto.

Sean el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, y el punto (x_1,y_1,z_1):

$$recta: \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

Plano perpendicular a una recta por un punto.

Sean la recta y el punto del caso anterior. Todos los planos perpendiculares a la recta tendrán la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ahora para hallar D sustituiremos en x, y ,z, el punto (x_1,y_1,z_1).

ACADEMIA ƐPSILON.
Jose Ignacio Ramos.
Urïbarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

Angulo formado por dos rectas "r" y "s".

Sean los vectores de las rectas "r" y "s": (a,b,c) y (u,v,w), respectivamente.
Entonces:

$$\cos(r,s): \frac{a.u + b.v + c.w}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Angulo formado por 2 planos "π_1" y "π_2".

Sean los planos: π_1: $Ax + By + Cz + D = 0$.
π_2: $A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

$$\cos(\pi_1, \pi_2): \frac{A.A' + B.B' + C.C'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \times \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Angulo formado por una recta "r" y un plano "π".

Sean el vector de la recta "r": (a,b,c); y el plano "π": $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\cos(\pi, r) = \frac{a.A + b.B + c.C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$\alpha = 90 - \begin{cases} (\pi, \pi_2) \\ (n, r) \end{cases}$

Recta simétrica de otra recta "r" respecto a un plano "π".

ACADEMIA *EPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

1. Intersección de "r" y "π", punto A.
2. Coger un punto cualquiera de "r", punto "P".
3. Por "P" recta "s" perpendicular a "π".
4. Intersección de "s" y "π", punto "Q".
5. Hallar el punto simétrico de "P" respecto de "Q", punto "P_1".
6. La recta formada por "A" y "P_1" será la recta solución.

Recta que pasa por un punto "P" y corta a otra recta "r" perpendicularmente.

1. Por "P" plano "π" perpendicular a "r".
2. Intersección de "r" y "π", punto "Q".
3. Unión de "P" y "Q" recta solución.

Distancia de un punto "P" a una recta "r".

1. Por "P" plano "π" perpendicular a la recta "r".
2. Intersección del plano "π" con la recta "r", punto "A".
3. La solución será la distancia entre el punto "P" y el "A".

Distancia de un punto "P" a un plano "π".

Sean π: $Ax + By + Cz + D = 0$, y $P(x_1,y_1,z_1)$:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Distancia de un plano a una recta.

Solo se puede hacer si la recta es paralela al plano.
Se coge un punto cualquiera de la recta y se halla la distancia de ese punto al plano como hemos visto en el apartado anterior.

Distancia entre dos rectas.

Sean: La recta "r" de vector $V_r(x_r,y_r,z_r)$ y un punto $P(x_1,y_1,z_1)$.
La recta "s" de vector $v_s(x_s,y_s,z_s)$ y un punto $Q(x_2,y_2,z_2)$.

1. Hallar el plano "π" formado por los vectores v_r, v_s y el punto P.
2. La distancia del punto "Q" al plano "π" será la solución.

Haz de planos que pasan por una recta.

Si la recta "r" viene dada por: $Ax + By + Cz + D = 0$.
$A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

El haz de planos será:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A'x + B'y + C'z + D) = 0.$$

ru planoren posizio erlatiboa

ı planoren posizio erlatiboa aztertzeko, aurreko kasuetan bezala ekingo ɟu, eratzen duten sistemaren bateragarritasuna aztertuz.

ıa π_1, π_2 eta π_3 planoak, euren ekuazio inplizituen bidez adieraziak:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &: A x + B y + C z + D = 0 \\ \pi_2 &: A' x + B' y + C' z + D' = 0 \\ \pi_3 &: A'' x + B'' y + C'' z + D'' = 0 \end{aligned}\right\}$$

ıchéren teorema aplikatuz, hiru planoek eratzen duten sistema eztabaiıko dugu; horrela, haien posizio erlatiboa aterako dugu. Hona, hurrenez ren, sistemaren koefizienteen matrizea eta matrize zabaldua:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{array}\right)$$

Baldin *rang* (M) = *rang* $(M/N) = 3$ bada, sistema bateragarri deterıninatua da; ebazpena, beraz, bakarra da, eta *hiru planoek puntu batean elkar ebakitzen dute,* 1. irudian bezala.

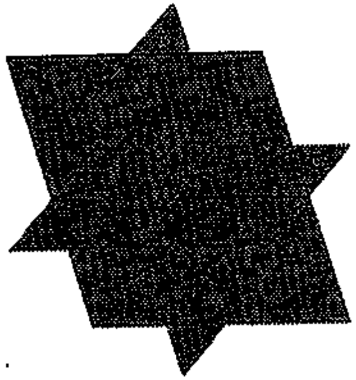
Baldin *rang* $(M) = 2$ eta *rang* $(M/N) = 3$ badira, sistema bateraezina da; beraz, ez dauka ebazpenik eta hiru planoek ez dute puntu komunik. Kasu honetan, bi gauza gerta daitezke:

- Koefizienteen matrizean edozein bi lerro proportzionalak baldin badira eta bestea ez, orduan *planoetako bi paraleloak dira eta hirugarrenak bi lerro paralelotan ebakitzen ditu (2. irud.).*
- Koefizienteen matrizean lerro bikote proportzionalik ez badago, *planoek bi bika elkar ebakitzen dute hiru lerro paralelotan (3. irud.).*

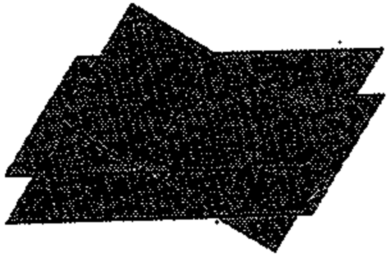
Baldin *rang* (M) = *rang* $(M/N) = 2$ bada, sistema bateragarri indeterminatua da; hau da, parametro baten menpekoak diren infinitu ebazpen dauzka, eta planoek zuzen batean elkar ebakitzen dute.

Hemen ere bi gauza gerta daitezke:

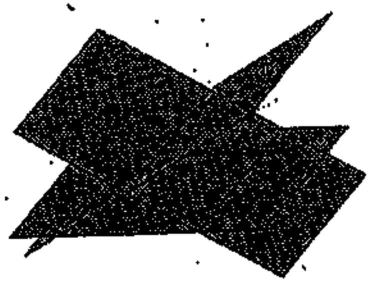
- Matrize zabalduaren edozein bi lerro proportzionalak baldin badira, *planoetako bi bat datoz eta besteak zuzen batean ebakitzen ditu (4. irud.).*
- Proportzionalak diren lerro-bektore bikoterik ez badago, *hiru planoek*



1. irud.



2. irud.



3. irud.

4. irud.

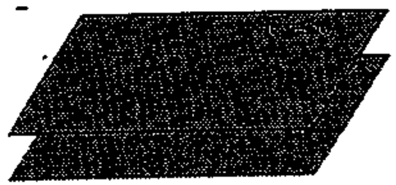
— Baldin *rang* $(M) = 1$ eta *rang* $(M/N) = 2$ badira, sistema bateraezina da eta, ebazpenik ez duenez, ez du puntu komunik. Kasu hoietan ere bi gauza gerta daitezke:

- Matrize zabalduaren bi lerro-bektore proportzionalak badira, *planoetako bi bat datoz eta bestea paraleloa da (6. irud.).*
- Lerro-bektore bikote proportzionalik ez badago, *hiru planoak paraleloak dira (7. irud.).*

— Baldin *rang* (M) = *rang* $(M/N) = 1$ bada, sistema bateragarri indeterminatua da, hau da, bi parametroren menpeko infinitu ebazpen dauzka, eta beraz, *hiru planoak bat datoz (8. irud.).*

5. irud.

7. irud.



6. irud.

8. irud.

MATRICES.

ACADEMIA ÜPSILON
JOSE I. RAMOS · ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

14. Calcula x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol.: 5/2, 3/2, 0 y 2, respectivamente.

15. Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba las igualdades:

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

c) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

16. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentra una matriz X que cumpla:

$3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$ **Sol.:** $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$

17. Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son matrices:

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sol.: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

19. Averigua cómo ha de ser una matriz X que cumpla:

$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$ **Sol.:** $X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

20. Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $A + B + C$ b) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$

c) $(A - B) \cdot C$ d) $A \cdot B \cdot C$

21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que

$$(A - I)^2 = 0$$

28. Resuelve matricialmente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y + z &= 13 \\ x + 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$$

Sol.: (3, 5, 8)

29. Resuelve matricialmente:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= -2 \\ 10x - 5y + 9z &= 48 \\ y - z &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Sol.: (2, −2, 2)

Calcula las matrices inversas de:

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & -6/7 & 4/7 \\ 6/7 & 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ACADEMIA
EPSILON
JOSE I. RAMOS · ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

31. Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} [illegible] \\ -1 & 3 & [illegible] & 2 \\ [illegible] & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & [illegible] \\ 2 & [illegible] & 5 \\ 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\ (A) = 3$; $ran\ (B) = 2$.

32. Calcula el rango de:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 13 \\ 1 & -2 & 3 & 12 \\ 2 & [illegible] & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\ (A) = 3$; $ran\ (B) = 2$.

33. Calcula a y b para que $ran\ (A) = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 4 & b \end{pmatrix}$$ **Sol.:** $a = 2$, $b = 0$.

34. Calcula a y b para que $ran\ (B) = $ [illegible]

$$B = \begin{pmatrix} [illegible] & a \\ 2 & 3 \\ [illegible] & b \end{pmatrix}$$

Sol.: $a = $ [illegible]; $b = $ [illegible]

35. Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Sol.: $ran\ (A) = 3$; $ran\ (B) = 3$.

21. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: -295.

22. Calcula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol.: [illegible]

23. Calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} [illegible] \\ -1 & x & [illegible] & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Sol.: $(x + 1)$ [illegible]

24. Halla el valor correspondiente a:

$$\begin{vmatrix} 15 & 1 & 14 & 4 \\ 6 & 12 & 7 & 9 \\ 10 & 8 & 11 & 15 \\ 3 & 13 & 12 & 16 \end{vmatrix}$$

Sol.: $-9\,240$.

25. Desarrolla *haciendo ceros* previamente:

$$\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & b & a \end{vmatrix}$$

Sol.: $m(c - m)\ (b - c)\ (a - b)$.

26. Desarrolla:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & [illegible] \\ a & e & [illegible] \\ [illegible] \end{vmatrix}$$

Sol.: $(a - b)\,(c - e)$ [illegible]

27. Prueba, sin desarrollarlo, que el determinante siguiente es nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & [illegible] \\ 6 & 7 & 8 & 9 & [illegible] \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$$

15. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

calcula, sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

Sol.: *a*) 3; *b*) 1; *c*) 1.

16. Comprueba la igualdad

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2x & x+y & 2y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x - y)^3$$

Aplica el método de Gauss para averiguar si los sistemas de ecuaciones de los siguientes ejercicios tienen o no solución. En caso afirmativo, encuéntrala.

45. $\begin{cases} x-2y = -3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{cases}$

Sol.: $(1+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$.

46. $\begin{cases} x+3y-z=-5 \\ 2x-y+5z=7 \\ x+10y-8z=9 \end{cases}$

Sol.: Incompatible.

47. $\begin{cases} x+3y+4z=1 \\ 2x+2y=4 \\ 2x+4y+4z=3 \end{cases}$

Sol.: $(5+4\lambda, -1-4\lambda, 2\lambda)$.

48. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$

Sol.: $(1, 5-\lambda, \lambda)$.

49. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+y-2z=-3 \\ x+4y-72z=-13 \end{cases}$

Sol.: Compatible det.

50. $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ -x+3y+z=3 \\ x+y+5z=7 \end{cases}$

Sol.: Compatible indet.

51. $\begin{cases} 4x-y+z=4 \\ x-y+4z=1 \\ 2x+y-7z=3 \end{cases}$

Sol.: Incompatible.

52. $\begin{cases} 4x-y+5z=-25 \\ 7x+5y-z=17 \\ 3x-y+z=-21 \end{cases}$

Sol.: $(-4, 9, 0)$.

53. $\begin{cases} -x+2y-3z=2 \\ -x+8y-27z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

Sol.: Incompatible.

54. $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{cases}$

Sol.: $(1-\lambda, \lambda-1, \lambda)$.

55. $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-2y-z=3 \\ 4x-5y-z=9 \end{cases}$

Sol.: $(1-\lambda, -1-\lambda, \lambda)$.

56. $\begin{cases} 2x-5y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Sol.: $(0, 0, 0)$.

Resuelve los sistemas de ecuaciones homogéneos planteados en los siguientes ejercicios:

32. $\left.\begin{array}{r} 3x-5y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $x=0;\ y=0,\ z=0$.

33. $\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ x+y+3z=0 \\ x-5y-9z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $(-\lambda, -2\lambda, \lambda)$.

34. $\left.\begin{array}{r} 5x+3y-4z=0 \\ 2x+5y+z=0 \\ 3x+2y+3z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $x=0, y=0, z=0$.

35. $\left.\begin{array}{r} -x+11y-4z=0 \\ -2x+4y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $\left(\lambda, \dfrac{\lambda}{3}, \dfrac{2\lambda}{3}\right)$

36. $\left.\begin{array}{r} 3x+6y+3z=0 \\ 5x+10y+5z=0 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $(\lambda, \mu, -\lambda-2\mu)$.

37. $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{array}\right\}$ **Sol.:** $x=0,\ y=0,\ z=0$

38. $2x+7y+3z=0$
$-x+z=0$

Discute en función del parámetro m y resuelve cuando sea posible los sistemas homogéneos planteados en los siguientes ejercicios:

39. $\left.\begin{array}{r} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\}$

Sol.: $m \neq 1 \rightarrow (0, 0, 0)$

$m = 1 \rightarrow (-2\lambda, \lambda, \lambda)$

40. $\left.\begin{array}{r} mx-3y+z=0 \\ x+my+z=0 \\ 3x-y+mz=0 \end{array}\right\}$

Sol.: $m \neq 2 \rightarrow (0, 0, 0)$.

$m = 2 \rightarrow (5\lambda, \lambda, -7\lambda)$

41. $\left.\begin{array}{r} (m-2)x-y+z=0 \\ x+(2m-1)y-mz=0 \\ x+my-z=0 \end{array}\right\}$

Sol.: $m \neq 1,\ m \neq 2 \rightarrow (0, 0, 0)$

$m = 1 \rightarrow (\lambda, \mu, \lambda+\mu)$.

$m = 2 \rightarrow (3\lambda, -\lambda, \lambda)$.

42. $\left.\begin{array}{r} x-my+z=0 \\ x+y+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{array}\right\}$

Sol.: $m \neq \pm 1 \rightarrow (0, 0, 0)$.

ᑌPSILON
JOSE I. RAMOS · ANA I MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

84 Encontrar el valor de a para que el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + az = 0 \end{cases}$ tenga soluciones distintas de la trivial ($x = y = z = 0$).

Sol.: $a = -3$

85 Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según sean los valores del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + (a+1)y + z = 2a \\ x + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Sol.: $a \neq 0 \rightarrow x = a,\ y = 1,\ z = -1.$
$a = 0 \rightarrow (-\lambda - \mu, \lambda, \mu).$

86 Dado el sistema de ecuaciones homogéneo $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$

a) Indicar para qué valores de k el sistema tiene solamente la solución trivial ($x = y = z = 0$).

b) Resolver el sistema anterior para un valor de k que lo haga compatible.

Sol.: *a)* $k \neq \frac{7}{4}$ *b)* $k = \frac{7}{4} \rightarrow \left(x = \frac{5\lambda}{4};\ y = \frac{-11\lambda}{4};\ z = \lambda\right).$

87 Sean S y S' dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que difieren sólo en los términos independientes. Si S tiene infinitas soluciones, ¿puede tener S' solución única? ¿Por qué?

[illegible]

Sol.: Si m [illegible]

28) [illegible]
$3x$ [illegible] $= 9$
$4x$ [illegible] $+ mz = 13$

Sol.: $m = 0 \rightarrow$ [illegible]
[illegible] $m \neq 0 \rightarrow \left(\frac{22}{7}, \frac{8}{7}, 0\right)$

30) $\begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Sol.: $m = 2 \rightarrow (2 - \lambda, 0, \lambda)$
$m \neq 2 \rightarrow (2, 0, 0)$

31) $\begin{cases} x + y + z = m \\ mx - y + z = -1 \\ 3x + \text{[illegible]} = m + 1 \\ 4x + my + 2z = \text{[illegible]} \end{cases}$

Sol.: $m = -1 \rightarrow (0, -1, 0)$
$m = 2 \rightarrow (1, 1 - \lambda, \lambda)$

71 $\begin{cases} x-my+\ldots z=\ldots \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{cases}$ [illegible] **Sol.:** $m \neq -1 \rightarrow$ Compatible, determinado. $m = -1 \rightarrow$ Incompatible.

72 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -x+y+2z=3 \\ 2x-y-z=m \end{cases}$ **Sol.:** $m = 1 \rightarrow (1, -2, 3)$. $m \neq 1 \rightarrow$ Incompatit

73 $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+z=1 \end{cases}$ **Sol.:** $m \neq 1, m \neq -2 \rightarrow \left(\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{1}{m\ldots}\right.$

$m = 1 \rightarrow (1-\lambda-\mu,\ \lambda,\ \mu)$. $m = -2 \rightarrow$ In

74 $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=0 \end{cases}$ **Sol.:** $m = 0 \rightarrow (5-3\lambda, \lambda, 0)$. $m = -1 \rightarrow$ Incomp

$m \neq 0,\ m \neq -1 \rightarrow \left(\frac{-10}{m+1}, \frac{5}{m+1}, \frac{5}{m\ldots}\right.$

75 $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=3 \\ x+3y+az=1 \\ x+2y+z=b \end{cases}$ **Sol.:** $a = 0,\ b = 2 \rightarrow (4-3\lambda, -1+\lambda, \lambda)$

$a \neq 0,\ b = 2 \rightarrow (4, -1, 0)$

$a \neq 0,\ b \neq 2 \rightarrow$ Incompatible

76 $\begin{cases} x+my+z=0 \\ mx-y+3z=0 \\ x-3y+mz=0 \end{cases}$ **Sol.:** $m \neq 2 \rightarrow (0, 0, 0)$. $m = 2 \rightarrow (-7\lambda, \lambda, 5\lambda)$.

77 $\begin{cases} 2x+3y+mz=2 \\ x+3y+z=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$ **Sol.:** $m = -1 \rightarrow$ Incompatible.

$m \neq -1 \rightarrow \left(\frac{10-4m}{m+1}\ ;\ \frac{m-6}{m+1}\ ;\ \frac{7}{m+1}\right)$.

78 Se da el siguiente sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas en el que el núm supone conocido:

$$\begin{cases} ax+2y=2 \\ 2x+ay=a \\ x-y=-1 \end{cases}$$

a) Probar razonadamente que, cualquiera que sea el valor de a, el sistema es comp

b) Determinar para qué valores de a es determinado y para cuáles indeterminado.

c) Hallar las soluciones en uno y otro caso.

Sol.: $a \neq -2 \rightarrow (0, 1)$. $a = -2 \rightarrow (-1+\lambda, \lambda)$.

UPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

JOSE I. RAMOS - ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD DE GEOMETRIA ANALITICA.

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(5,0,1) y B(4,1,0), y es paralelo a la recta dada por los planos: $x-2y+3z=0$, $2x+y-z=5$.
Sol.(Pag.58): $2x+y-z-9=0$.

2. Estudiar, según los valores de m, la posición relativa de los planos:
$$mx-y-z=-m$$
$$x-my+mz=m$$
$$x+y+z=-1$$
Si para algún valor de m se cortasen según una recta, escribir su vector de dirección. Dar la solución en todos los casos.
Sol. (Pag. 67): $m\neq0$ y $m\neq-1$, se cortan en un punto $(-1, -(m+1)/2m, (m+1)/2m)$
$m=0$, se cortan los planos dos a dos en rectas paralelas.
$m=-1$, se cortan en una recta de dirección $(-1,1,0)$.

3. Dadas las rectas: r: $x-1/1 = y-1/-1 = z+2/-2$ y s: $x = 2+\lambda$
$y = 1 - \lambda$
$z = 2\lambda$
Estudiar su posición y, si fuese posible, estudiar la posición del plano que las contiene.
Sol. (Pag.74): Las dos rectas se cruzan. No hay ningún plano que las contenga.

4. Calcular el valor de **a** para que los puntos (a,0,1), (0,1,2), (1,2,3), (7,2,1), estén en el mismo plano. Calcular también la ecuación del plano que las contiene.
Sol. (Pag.81): $a = -1$; $x-4y+3z-2=0$.

5. Probar que los puntos A(1,-1,2), B(2,2,-3) y C(1,1,0) no están alineados y hallar la ecuación del plano que determinan.
Sol. (Pag.101): $2x+y+z-3=0$.

6. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación: $x-1/2 = y-1/2 = z/1$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos (2,0,0) y ((0,1,0).
Sol. (Pag.106): $x+2y-6z-3=0$.

7. Dividir el segmento A(1,2,1), B(-1,0,3) en tres partes iguales mediante los planos α y β perpendiculares a la recta AB. Dar las ecuaciones a ambos planos.
Sol. (Pag.12): $x+y-z=0$, $x+y-z+2=0$.

8. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,0,0) y es perpendicular al plano $x-y+z=1$.
Sol. (Pag. 19): $(x = 1+\lambda , y = -\lambda , z = \lambda)$

9. Hallar la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos: $2x+y-z=0$, $x-y+z+3=0$ y pasa por el punto (3,2,1).
Sol. (Pag.75): $y+z-3=0$.

10. Hallar los valores de m y n para que las rectas siguientes r y s sean paralelas:
r: $(x = 5+4\lambda, y = 3+\lambda, z = -\lambda)$ s: $x/m = y-1/3 = z+3/n$
Sol. (Pag. 89): $m = 12$, $n = -3$.

GPSILON
JOSE I. RAMOS · ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 · (94) 449 47 44
Uribarri, 12 · 48970 BASAURI

11. Dado el plano π: $2x+y-z=2$ y la recta r determinada por la intersección de los planos $x-y+z-3=0$ y $2x+y-1=0$, obtener la ecuación del plano perpendicular a π y paralelo a la recta r, y que contiene al punto (1,2,1).
Sol. (Pag. 90): $x-y+z=0$.

12. Dado el plano π: $2x-3y+z=0$ y la recta r: $(x = 1+\lambda, y = 2-\lambda, z = -1+2\lambda)$, hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.
Sol. (Pag.115): $5x+3y-z-12=0$.

13. Averiguar los valores de a y b para que sean ortogonales y coplanarias, las rectas
r: $(x = az+2, y = z-3)$ y s: $x-1/2 = y+1/b = z$.
Sol. (Pag.141): $a=1/2$, $b=-2$.

14. Dados el punto M(3,-2,-4), la recta r: $x-2/3 = y+4/-2 = z-1/2$ y el plano π: $3x-2y-3z-7=0$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto M, es paralela al plano π y corta a la recta r.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto M, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

Sol. (Pag.152): a) $(x = 8+5\lambda, y = -8-6\lambda, z = 5+9\lambda)$. b) $2x+3y = 0$.

15. Consideremos la recta r: $(5x-y+z=0, x-y-z+4=0)$ y el plano π: $ax-6y+4z-5=0$. Se pide:

a) Calcular el valor de a para el que r es paralela a π.

b) Calcular el valor de a para el que r es perpendicular a π.

Sol. (Pag.190): a) $a = 26$, b) $a = -1/2$.

16. Determinar la ecuación del plano π que esta a distancia $\sqrt{6}$ del origen y es paralelo a aquel que tiene por ecuación $2x+y-z=3$.
Sol. (Pag. 20): $2x+y-z+6=0$; $2x+y-z-6=0$.

17. Sea π el plano definido por los puntos $P_0(1,0,1)$, $P_1(-1,1,1)$, $P_2(0,-1,2)$. Sea r_1 la recta que pasa por P_0 y P_1 y r_2 la recta que pasa P_0 y P_2. y sea Q(0,0,1)

a) Hallar la ecuación de la recta r_3 que pasa por Q y es perpendicular al plano π.

b) Hallar la ecuación de la recta r_4 que pasa por Q y es paralela a r_1.

c) Hallar la distancia de r_4 a r_2.

Sol. (Pag. 48): a) $(x = \lambda, y = 2\lambda, z = 1+3\lambda)$ b) $(x=-2\lambda, y=\lambda, z=1)$ c) 0,267.

18 .Calcular la distancia entre la recta r: $x-2/3 = y/1 = z-1/4$ y la recta s definida por los planos: $x-3y-11=0$, $4y-z+4=0$.
Sol. (pag. 59): 5,612.

19. Hallar un punto de la recta: $x/1 = y-2/1 = z-3/2$ que equidiste de los puntos A(1,0,1) y B(0,4,2).
Sol. (Pag. 124): P(-2/5,8/5,11/5)

20. Encontrar la distancia del punto P(1,2,1) a la recta de ecuaciones: $x+y-z=3$, $x-y+z=1$.
Sol. (Pag. 130): 1.

21. Por el punto medio del segmento que une los puntos P(3,1,5) y Q(-1,7,3) se traza un plano perpendicular a su dirección. Sea A,B y C los puntos de corte del plano con los ejes coordenados. Calcular el área del triángulo ABC.
Sol. (Pag.142): 11,22.

22. Calcular las coordenadas de un punto de la recta r tal que forme un triángulo rectángulo en A con los puntos A(1,5,6) y B(7,6,6) estando r dada por las ecuaciones: $x+y+2z=3$, $2x-y-3z=2$.
Sol. (Pag. 42): (2,-1,1)

23. Sea P_1 el punto (1,0,-1), P_2 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x-2y=0$, y sea P_3 el punto simétrico de P_2 respecto del plano $x+2y+2z=1$. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3.
Sol (Pag. 29): $2x+y-4z-6=0$.

24. Dadas las rectas r: $x-3/2 = y-1/1 = z+1/-2$ y s: $x-4/1 = y/2 = z-4/2$.
Hallar su posición relativa, y la distancia entre ellas. Sabiendo que dos de los lados de un cubo estan entre las rectas r y s respectivamente. Hallar su volumen.
Sol. (Pag. 182): Se cruzan y son perpendiculares. Distancia: 3. Volumen: 27.

DERIVADAS.

Academia ƐPSILON.
Uríbarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94

1.- $y = 3$ .... $y' = 0$.

2.- $y = x+5$ .... $y' = 1$.

3.- $y = x^7$ .... $y' = 7x^6$.

4.- $y = x^6-x^3$ .... $y' = 6x^5-3x^2$.

5.- $y = 2x^4$ .... $y' = 8x^3$.

6.- $y = ax+b$ .... $y' = a$.

7.- $y = 5x-2$ .... $y' = 5$.

8.- $y = a^5$ .... $y' = 0$.

9.- $y = ax^2+bx+c$ .... $y' = 2ax+b$.

10.- $y = x(x-1)$ .... $y' = 2x-1$.

11.- $y = (x+1)(x-1)$ .... $y' = 2x$.

12.- $y = ax^3+bx^2+cx+d$ .... $y' = 3ax^2+2bx+c$.

13.- $y = x^3-x^2+4x-5$ .... $y' = 3x^2-2x+4$.

14.- $y = x^4-4x^3+5x^2$ .... $y' = 4x^3-12x^2+10x$.

15.- $y = 2x^3-6x+1$ .... $y' = 6x^2-6$.

16.- $y = x^4-5x^2+2$ .... $y' = 4x^3-10x$.

17.- $y = 2x^3+3x^2-6x+5$ .... $y' = 6x^2+6x-6$.

18.- $y = (x+1)(x^2-x+3)$ .... $y' = 3x^2+2$.

19.- $y = x(x-1)^2$ .... $y' = 3x^2-4x+1$.

20.- $y = a(x-1)^2$ .... $y' = 2a(x-1)$.

21.- $y = x(a-1)^2$ .... $y' = (a-1)^2$.

22.- $y = a(a-1)^2$ .... $y' = 0$.

23.- $y = 5\log_2 x$ .... $y' = 5\log_2 e / x$.

24.- $y = 5\log_5 5x$ .... $y' = 5\log_5 e / x$.

25.- $y = 2\ln x + \operatorname{sen} x - 4\cos x$ .... $y' = 2/x + \cos x + 4\operatorname{sen} x$.

26.- $y = x(1+x)^5$ .... $y' = (1+6x)(1+x)^4$.

27.- $y = x.\operatorname{sen} x$ .... $y' = \operatorname{sen} x + x.\cos x$.

28.- $y = x^3 \ln x$ .... $y' = x^2(1+3\ln x)$.

29.- $y = 1+x / 1-x$ .... $y' = 2 / (1-x)^2$.

30.- $y = 3x / senx$ .... $y' = 3(senx-xcosx) / sen^2x$.

31.- $y = lnx / x$ .... $y' = 1-lnx / x^2$.

32.- $y = senx / 1-cosx$ .... $y' = 1 / cosx-1$.

33.- $y = x^3 cosx$ .... $y' = x^2(3cosx-x.senx)$.

34.- $y = x.tgx$ .... $y' = x+senx.cosx / cos^2x$.

35.- $y = (1+x^2)^7$ .... $y' = 14x(1+x^2)^6$.

36.- $y = ln(senx)$ .... $y' = cotgx$.

37.- $y = sen(lnx)$ .... $y' = cos(lnx) / x$.

38.- $y = cotgx$ .... $y' = -1 / sen^2x$.

39.- $y = secx$ .... $y' = senx / cos^2x$.

40.- $y = cosecx$ .... $y' = -cosx / sen^2x$.

41.- $y = 1-senx / 1-cosx$ .... $y' = 1-senx-cosx / (1-cosx)^2$.

42.- $y = (x^2-3x+1)senx+x.cosx$ .... $y' = (x-3)senx+(x^2-3x+2)cosx$.

43.- $y = senx-cosx / senx+cosx$ .... $y' = 2 / (senx+cosx)^2$.

44.- $y = x.cosx+senx$ .... $y' = 2cosx-x.senx$.

45.- $y = x / (1+x^2)^2$ .... $y' = 1-3x^2 / (1+x^2)^3$.

46.- $y = x.senx.lnx$ .... $y' = senx.lnx+x.cosx.lnx+senx$.

47.- $y = x.sen(lnx)$ .... $y' = sen(lnx)+cos(lnx)$.

48.- $y = sen2x / x^2+1$ .... $y' = 2(x^2+1).cos2x-2x.sen2x / (x^2+1)^2$.

49.- $y = lnx^3$ .... $y' = 3 / x$.

50.- $y = lnx^2+ln^2x$ .... $y' = 2(1+lnx) / x$.

51.- $y = e^{2x}$ .... $y' = 2e^{2x}$.

52.- $y = 3^x$ .... $y' = 3^x.ln3$.

53.- $y = x.e^x$ .... $y' = (x+1)e^x$.

54.- $y = e^x+e^{-x}$ .... $y' = e^x-e^{-x}$.

55.- $y = x.4^x$ .... $y' = (1+x.ln4)4^x$.

56.- $y = (x^2-3x+3)e^x$ .... $y' = (x^2-x)e^x$.

57.- $y = e^x(senx+cosx)$ .... $y' = 2e^x.cosx$.

58.- $y = e^x / cosx$ .... $y' = e^x(senx+cosx) / cos^2x$.

59.- $y = x^5(1+x^2)^3$ .... $y' = x^4(1+x^2)^2(11x^2+5)$.

60.- $y = x^x$ .... $y' = x^x(1+lnx)$.

61.- $y = x^3 / lnx$ .... $y' = x^2(3lnx-1) / ln^2x$.

62.- $y = arc\ tg(1+x /1-x)$ .... $y' = 1 / 1+x^2$.

63.- $y = arc\ tgx+ln(x^2+1)$ .... $y' = 1+2x / 1+x^2$.

64.- $y = 1/\sqrt{x}$ .... $y' = -1/2x\sqrt{x}$.

65.- $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ .... $y' = 1/\sqrt{x^2+1}$.

66.- $y = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$ .... $y' = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

67.- $y = x.\sqrt{x^2+1}$ .... $y' = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

68.- $y = \ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1)$ .... $y' = \dfrac{2x+3}{x^2+2x+2}$.

69.- $y = e^{x^2.\operatorname{sen} x}$ .... $y' = x(2\operatorname{sen} x + x.\cos x)e^{x^2.\operatorname{sen} x}$.

70.- $y = \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}$ .... $y' = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

71.- $y = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + \ln(1-\operatorname{sen} x)$ .... $y' = \dfrac{(1+\operatorname{sen} x).\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$.

72.- $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\ln\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$ .... $y' = \dfrac{1}{(3-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}).\cos^2\dfrac{x}{2}}$.

73.- $y = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \dfrac{1}{2}.\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ .... $y' = \dfrac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$.

74.- $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$ .... $y' = -\dfrac{1}{2}\sec x$.

Academia EPSILON.

Uribarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94.

PROBLEMAS MIXTOS (FUNCIONES, TANGENTE, CONT., DERIV., AREAS)

1. Sea la función f(x): $\begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función f. ***(Es cont. ; no es deriv.)***
b) Calcule sus asíntotas. ***(y = 0)***

c) Determinar la ecuación de la recta tangente a a gráfica f en x = 2. ***(y = -0,5x +2)***

2. Sea la función $f(x) = x^2-6x+2 \ / \ x-3$, determinar:

a) Dominio de definición. ***(R - {3})***
b) Asíntotas. ***(x = 3 ; y = x –3)***
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus máximos y mínimos. ***(siempre es creciente ; No hay MAX. y MIN.)***
d) Area encerrada por f(x); x = 5; x =9 ; g(x) = -4 / x-3 ***(A = 16)***

3. Dada la función f(x): $\begin{cases} -x^2+4 & \text{si } x \leq -1 \\ |x-2| & \text{si } x > -1 \end{cases}$

a) Representar gráficamente f
b) Estudiar su continuidad ***(Continua en todo R)***
c) Calcular el área del recinto limitado por f y el eje de abcisas ***(A = 37/6)***

4. Hallar el área que limitan las curvas: $f(x) = x^2-2x$ y $g(x) = 1-2x$ ***(A = 4/3)***

5. a) Calcular los puntos del gráfico de la curva $y = x^3-2x^2+x+1$, donde la recta tangente tiene pendiente –1/3. ***(2/3 , 29/27)***
b) Determinar la recta tangente en esos puntos. ***(9x+27y-35 = 0)***

6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = e^{2-x}$ en el punto donde esta corta al eje de ordenadas. ***($y = -e^2x+e^2$)***

7. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2-4x$, el eje OX y las rectas x = -1; x = 4. ***(39/3)***

8. En la parábola $f(x) = x^2-5x+8$, ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela a la bisetriz del primer y tercer cuadrante? ***(3,2)***

9. La curva y = 4 / x+4, el eje OX, el eje OY y la recta x = 4 limitan un área. Calcular dicho área. ***(4ln2)***

Academia EPSILON.

Uríbarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94.

10. Para la función $f(x) = x^3-2x^2+x$, hallar: cortes con los ejes, máximos, mínimos y puntos de inflexión; crecimiento y decrecimiento; concavidad y convexidad.

Corte con los ejes: (0,0) ; (1,0)
MAX. (1/3,4/27) ; MIN. (1,0)
P. Inflexión (2/3,2/27)
CRECE: $(-\infty,1/3) \cup (1,+\infty)$
DECRECE: (1/3,1)
CÓNCAVA: $(2/3,+\infty)$
CONVEXA: $(-\infty,2/3)$

11. Hallar el área del recinto comprendido entre $f(x) = 3x^2$ y la recta $y = 3$. ***(A = 4)***

12. Determinar los valores de ***k*** para que las tangentes a la curva $y = kx^3- (kx)^2+7x-18$, en los puntos de abcisas 1 y 2 sean paralelas. ***(k = 0 ; k = 9/2)***

13. Sabiendo que la función f(x) es continua, y su expresión es:

$$f(x) \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ Ax^2+6x+B & \text{si } 1 \le x < 4 \\ -x+8 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

determinar: a) A y B ***(A = -1; B = -4)***
b) La derivabilidad de la función ***(Derivable en R - {1,4})***
c) Hallar el área limitada por la gráfica de la función f, las rectas x = 2, x = 6 y el eje de abcisas. ***(A = 46/3)***

14. Calcular las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^3$ que sean paralelas a la recta $y = 3x$. Determinar los puntos de tangencia. ***y-1 = 3(x-1) en (1,1)***
y+1 = 3(x+1) en (-1,-1)

15. Hallar a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, tenga un máximo en (-2,4) y un mínimo en (-1,6). ***(a = 20; b = 90; c= 120; d = 44)***

16. Halla a,b,c para que la función $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$, tenga un punto de inflexión en x = 3, pase por (0,1) y tenga un mínimo en x = 1 ***(a = -9; b = 15; c = -7)***

Academia ƐPSILON.
Uribarri, 12, Bajo – BASAURI.
Tfno: 94 440 31 94.

1. Hallar dos números cuya suma es 18, si el producto del uno por el cuadrado del otro ha de ser máximo. ***(6 y 12)***

2. Hallar dos números cuya suma es 24, si el producto de uno por el cubo del otro ha de ser máximo. ***(6 y 18)***

3. Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 m^2 de superficie para poderlo cercar mediante una valla de longitud mínima. ***(60 x 60)***

4. Se quiere vallar un campo rectangular que esta junto a un camino. Si la valla que esta al lado del camino cuesta 80 pesetas el metro y para los otros lados a 10 pesetas el metro. Hallar el área de mayor campo que se puede cercar con 28800 pesetas. ***(160 x 720)***

5. De todos triángulos isósceles de 12 m de perímetro, hallar los lados del que tome área máxima. ***(4 x 4 x 4)***

6. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de 12 cm de radio, calcular las dimensiones del que tenga mayor área. ***(17 x 17)***

7. La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es de 48 cm. Calcular las dimensiones de ese prisma para que su volumen sea máximo. ***(4 x 4 x 4)***

8. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base del triángulo para que su volumen sea máximo? ***(12)***

9. ¿Qué dimensiones debe tener un bote cilíndrico de 1 litro de capacidad para que se utilice en su construcción la menor cantidad de material? ***(R = 0,54 ; h = 1,08)***

10. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm cada uno. Calcular las dimensiones de la hoja para las cuales el gasto de papel es mínimo. ***(10 x 5)***

11. Se quiere fabricar una caja de madera sin tapa con una capacidad de 2 m^3. Por razones de seguridad en el transporte de la misma, el largo de la caja ha de ser doble que el ancho. Además, la madera para construir la base de la caja cuesta 12 euros por metro cuadrado, mientras que la madera para construir las caras laterales cuesta 8 euros por metro cuadrado. Hallar las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo. Calcular dicho coste mínimo. ***(2 x 1 x 1)*** ***(72 euros)***

12. Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea e doble de larga que de ancha en la que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a 1 metro. ¿Qué medidas debe tener la caja? ***(2/9 ; 4/9 ; 1/3)***

L'HOPITAL.

Hallar: LIMITES: HOJA 1

1.- $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

2.- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x} = -2$$

3.- $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)\cdot\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

4.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{arc\,tg}(x - \frac{\pi}{2})}{\operatorname{arc\,sen}(\cos x) + e^{x-\pi/2} - 1} = 0$$

5.- $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

6.- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{3}{2}$$

7.- $$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x + x^4}{2e^x - x^5} = \frac{1}{2}$$

8.- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + x}{x + \operatorname{sen} x} = 1$$

9.- $$\lim_{x\to 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x) = 0$$

10.- $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^{x-1} - 1}\right) = \frac{1}{2}$$

11.- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

12.- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

13.- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

14.- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{6}$$

15.- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$$

16.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = -1$$

17.- $$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$$

18.- $$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \cdot \ln x = 0$$

19.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{tg} x\right] = -1$$

20.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \cos 3x = -3$$

21.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{e}$$

22.- $$\lim_{x\to 0} (1-\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cot} x} = \frac{1}{e}$$

23.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-2x+\pi)^{\operatorname{tg} x} = e^2$$

24.- $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = 1$$

ACADEMIA
EPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

EJERCICIOS DE TEOREMAS.

1. Comprueba que la función: $\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad -0{,}5 \le x \le 1 \\ 5-(x-2)^2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Averigua donde cumple la tesis.
Solución: $x = 2$.

2. Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,b]$. ¿Dónde cumple la tesis?.
Solución: $b = 2$; $x = 2\sqrt{3}/3$.

3.Calcula a y b para que la función: $\begin{cases} x^2+2x+a & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2+bx & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-3,2]$. ¿Dónde cumple la tesis?.
Solución: $a = 0$; $b = 2$; $c = \pm 1{,}3$.

4. Calcula m, p y n para que la función: $\begin{cases} -x^2+px & \text{si} \quad -1 \le x \le 3 \\ mx+n & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,5]$. ¿Dónde cumple la tesis?.
Solución: $m = 10/3$; $p = -8/3$; $n = 9$.

5. Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $[-2,-1]$. Calcular el valor correspondiente a c.
Solución. $c = -3/2$.

6. Indica en que punto del intervalo $[2,6]$ verifica el teorema del valor medio la función:
$$\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$$
Solución: $c = -11/2$.

7. Halla el valor de c donde se cumplen las tesis del teorema de Cauchy, siendo:
$f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1,4]$.
Solución: $c = 2{,}5$.

8. Dada la función $f(x) = x^3 - 18x$ definida en el intervalo $[0,3\sqrt{2}]$ comprueba que verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor c correspondiente en dicho intervalo.
Solución: $c = \sqrt{6}$.

9. Calcula a, b y c para que la función: $\begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si} \quad x < 2 \\ cx + 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$. ¿En que punto cumple la tesis?.
Solución: $a = -3$; $b = 5$; $c = 1$. **En** $x = 3/2$.

10. Calcula a, b y c para que la función: $\begin{cases} x^2 + ax & \text{si} \quad x < 3 \\ bx + c & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,8]$. Di donde se cumple la tesis.
Solución: $a = -39/8$: $b = 9/8$; $c = -9$.

11. Calcula a y b para que la función: $\begin{cases} ax - 3 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2,6]$. ¿Dónde cumple las tesis?.
Solución: $a = 2$; $b = 19$. **En** $x = 9/2$.

12. Se tiene la función: $\begin{cases} x^2/2 - 3/2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1/x & \text{si} \quad -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$

Prueba que la función satisface las hipótesis del teorema del valor medio y calcula los valores intermedios vaticinados por el teorema.
Solución: $x = -1/2$; $x = -\sqrt{2}$.

INTEGRALES INMEDIATAS.-

ACADEMIA *ƐPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri. 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

1.– $\int 4x^5 dx$ .... $\frac{2x^6}{3} + C.$

2.– $\int 2\sqrt{x}dx$ .... $\frac{4x\sqrt{x}}{3} + C.$

3.– $\int \frac{1}{5x^3}dx$ .... $-\frac{1}{10x^2} + C.$

4.– $\int \sqrt{2x^3}dx$ .... $\frac{2\sqrt{2}}{5}.x^2.\sqrt{x} + C.$

5.– $\int \frac{7}{\cos^2 x}dx$ .... $7.\text{tg}\,x + C.$

6.– $\int \frac{\cos x}{3}dx$ .... $\frac{\text{sen}\,x}{3} + C.$

7.– $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ .... $4.\text{arcsen}\,x + C.$

8.– $\int 10^x dx$ .... $\frac{10^x}{\ln 10} + C.$

9.– $\int -\frac{5}{1+x^2}dx$ .... $-5.\text{arctg}\,x + C.$

10.– $\int 3.e^x dx$ .... $3.e^x + C.$

11.– $\int ((2+\cos x)^2 - \cos^2 x)dx$ .... $4.(x + \text{sen}\,x) + C.$

12.– $\int (3 + 5x - \text{sen}\,x)dx$ .... $\frac{5x^2}{2} + 3x + \cos x + C.$

13.– $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx$ .... $\ln x - 2\sqrt{x} + C.$

INTEGRALES POR SUSTITUCION.-

ACADEMIA ЄPSILON.
Jose Ignacio Ramos.
Uríbarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

1.– $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$ .... $-\frac{2\sqrt{1-5x}}{5}+C.$

2.– $\int e^{5x}dx$ .... $\frac{e^{5x}}{5}+C.$

3.– $\int \cos 4x dx$ .... $\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}+C.$

4.– $\int \frac{7x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ .... $-7\sqrt{1-x^2}+C.$

5.– $\int \frac{7}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ .... $\frac{7}{2}.\operatorname{arcsen} 2x+C.$

6.– $\int \operatorname{sen} x.\cos x dx$ .... $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C, o, \frac{-\cos^2 x}{2}+C.$

7.– $\int \operatorname{tg} x dx$ .... $-\ln(\cos x)+C.$

8.– $\int \frac{dx}{x-4}$ .... $\ln(x-4)+C.$

9.– $\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx$ .... $\operatorname{arctg} x+\ln(1+x^2)+C.$

10.– $\int \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ .... $-\sqrt{1-4x^2}+C.$

11.– $\int \frac{2\cos x}{5+3\operatorname{sen} x}dx$ .... $\frac{2}{3}.\ln(5+3\operatorname{sen} x)+C.$

12.– $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$ .... $\frac{1}{2}.\operatorname{arcsen}\frac{2x}{5}+C.$

13.– $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ .... $\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

14.– $\int \frac{e^{5\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ .... $\frac{2}{5}.e^{5\sqrt{x}}+C.$

15.– $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ .... $\frac{1}{2}.\ln(x^2+2x+2)+C.$

16.– $\int \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^5 x}dx$ .... $\frac{1}{2\cos^4 x}+C.$

17.– $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}.\operatorname{arcsen} x}dx$ .... $5.\ln(\operatorname{arcsen} x)+C.$

18.– $\int \frac{\ln^7 x}{7x}dx$ .... $\frac{1}{56}.\ln^8 x+C.$

Resolver las siguientes integrales:

1.- $\int (1-x^2)\sqrt{x}\,dx$ ([illegible])

2.- $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3-2)^3}$

3.- $\int (e^{2x}+2)^5 e^{2x}\,dx$

4.- $\int 3^{5x^2} x\,dx$

5.- $\int \cot x\,dx$

6.- $\int \operatorname{sen} e^x \cdot e^x\,dx$

7.- $\int \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$

8.- $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,dx$

9.- $\int \frac{dx}{x\,\operatorname{sen}^2(\ln x)}$ $\cancel{dx}$

10.- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

11.- $\int \frac{x}{1+(x^2-2)^2}\,dx$

12.- $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{1-(x^3-2x)^2}}\,dx$

13.- $\int \frac{x}{2+x^4}\,dx$

14.- $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

15.- $\int \operatorname{sen} x \cos x (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

16.- $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$

17.- $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

18.- $\int \cos^2 x\,dx$

19.- $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

20.- $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$

21.- $\int (1+\cos x)^3 \operatorname{sen} x\,dx$

22.- $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-4x}}\,dx$

23.- $\int x^2 \cdot \operatorname{sen} x^3\,dx$

24.- $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

25.- $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

26.- $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}\,dx$

27.- $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

28.- $\int e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(e^{2x}+2)\,dx$

INTEGRALES POR PARTES.-

ACADEMIA *EPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

1.- $\int x.\cos x dx$ .... $x.\operatorname{sen} x + \cos x + C.$

2.- $\int 3x.e^x dx$ .... $3e^x.(x-1) + C.$

3.- $\int x.e^{-x} dx$ .... $-e^{-x}.(1+x) + C.$

4.- $\int x.\ln x dx$ .... $\dfrac{x^2.(2\ln x - 1)}{4} + C.$

5.- $\int x^2.\cos 2x dx$ .... $\dfrac{x^2.\operatorname{sen} 2x}{2} + \dfrac{x.\cos 2x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C.$

6.- $\int \dfrac{\ln x}{x^2} dx$ .... $-\dfrac{1+\ln x}{x} + C.$

7.- $\int e^x.\operatorname{sen} x dx$ .... $\dfrac{e^x.(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C.$

8.- $\int \operatorname{sen} x.\ln(1+\operatorname{sen} x) dx$ .... $x + (1 - \ln(1+\operatorname{sen} x)).\cos x + C.$

9.- $\int \ln^2 x dx$ .... $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$

10.- $\int \operatorname{arcsen} x dx$ .... $x.\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

INTEGRALES RACIONALES.

ACADEMIA *ÉPSILON.*
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94.
(94) 449 47 44.

1.– $\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{(x-1)^2}dx$ .... $\frac{x^3+9x^2-26x}{2(x-1)}+12\ln(x-1)+C$

2.– $\int \frac{1}{x^2+x}dx$ .... $\ln x-\ln(x+1)+C.$

3.– $\int \frac{7}{x^2-4}dx$ .... $\frac{7}{4}\ln(x-2)-\frac{7}{4}\ln(x+2)+C.$

4.– $\int \frac{3x+2}{2x^2+x}dx$ .... $2\ln x-\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C.$

5.– $\int \frac{2x+6}{x^2+6x+5}dx$ .... $\ln(x^2+6x+5)+C.$

ACADEMIA ÉPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

6.– $\int \frac{x+1}{x^2-9}dx$ .... $\frac{2}{3}\ln(x-3)+\frac{1}{3}\ln(x+3)+C.$

7.– $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+3}dx$ .... $4\ln(x-3)-\ln(x-1)+C.$

8.– $\int \frac{7x-2}{x^2-6x+9}dx$ .... $7\ln(x-3)-\frac{19}{x-3}+C.$

9.– $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$ .... $x+\ln(x^2-x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

10.– $\int \frac{x^3-5x^2+2x+6}{2x^2+1}dx$ .... $\frac{x^2}{4}-\frac{5x}{2}+\frac{3}{8}\ln(2x^2+1)+\frac{17\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C.$

11.– $\int \frac{x^4-3x^2+6x+1}{x^2+1}dx$ .... $\frac{x^3}{3}-4x+3\ln(x^2+1)+5\operatorname{arctg}x+C.$

12.– $\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx$ .... $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

13.– $\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx$ .... $\frac{x^2}{2}-2x+\ln(x^2+2x+2)+2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$

14.– $\int \frac{1}{x^2+4x-5}dx$ .... $\frac{1}{6}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+5)+C.$

15.– $\int \frac{(x+3)^3}{x^2+4x+7}dx$ .... $\frac{x^2}{2}+5x-\frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+C$

16.– $\int \frac{x^3+x^2+x-1}{3-2x-x^2}dx$ .... $-\frac{x^2}{2}+x-\frac{11}{2}\ln(x+3)-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C.$

ACADEMIA EPSILON
JOSE I. RAMOS - ANA I MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 449 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

ACADEMIA EPSILON.
Jose Ignacio Ramos.
Uribarri, 12 – BASAURI.
Tfno: (94) 440 31 94 – (94) 449 47 44.

AREAS.

1.- $y = x^2-4$; $y = 0$ .... **Sol.: 32/3.**

2.- $y = 4 / 1+x^2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ .... **Sol.: π.**

3.- $y = \sqrt{x+1}$; $x = 0$ .... **Sol.: 4/3.**

4.- $y = x^2-5x+6$; $x = 0$; $y = 0$ .... **Sol.: 14 / 3.**

5.- $y = 4x / 1+x^2$; $y = 0$; $x = 3$ .... **Sol.: 2ln10.**

6.- $y = x(x-2)(x-4)$; $y = 0$ .... **Sol.: 8.**

7.- $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$ .... **Sol.: e^3-1.**

8.- $y = \sqrt{6x}$; $y = x$ .... **Sol.: 6.**

9.- $y = 2\sqrt{2x}$; $y = x^2 / 6$ .... **Sol.: 16.**

10.- $y = 2\sqrt{2x}$; $y = 6-x$; $y = 0$ .... **Sol.: 40/3.**

11.- $y = x+2 / x^2+4x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 3$ .... **Sol.: ½. Ln21/5.**

12.- $y = 6x^2-3x^3$; $y = 0$ .... **Sol.: 4.**

13.- $y = x^2$; $y = x^3-2x^2+2x$ .... **Sol.: ½.**

14.- $y = x^3-x$; $y = 3x$ .... **Sol.: 8.**

15.- $y = x^2+x+1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 6$ .... **Sol.: 96.**

VOLUMENES.

1.- Volumen del área 1.-, al girar alrededor del eje X .... **Sol.: 512π/15.**

2.- Volumen del área 3.-, al girar alrededor del eje X .... **Sol.: π/2.**

3.- Volumen del área 7.-, al girar alrededor del eje X .... **Sol.: $\pi/2 \cdot (e^6-1)$.**

4.- Volumen de un cono de radio "r" y altura "h" .... **Sol.: $1/3.\pi r^2 h$.**

ACADEMIA
EPSILON
JOSE I RAMOS ANA I MORENO
Tel. (94) 440 31 94 - (94) 4 ,9 47 ..
... 12 48970 BASAURI

CALCULO DE PROBABILIDADES

1- En un determinado curso están matriculados 100 varones y 50 mujeres.Aprueban el curso completo 60 varones y 40 mujeres.
   a)Determinar la probabilidad de que un alumno del curso sea varón y apruebe.(0,4)
   b)Determinar la probabilidad de que una de las personas matriculadas suspenda.(0,33)
   c)Una de las personas matriculadas ha aprobado.determinar la probabilidad de que sea mujer.(0,4)

2- Considerad un dado equilibrado y una moneda que se ha trucado de manera que la probabilidad de obtener cara es el doble de la probabilidad de obtener cruz.Lanzamos la moneda y el dado.Calculad la probabilidad de que:
   a. Obtengamos cara y cinco.(1/9)
   b. Obtengamos cara y un número par. (1/3)
   c. Obtengamos cara o un número par. (5/6)
   d. No obtengamos cara y cinco.(8/9)

3- En una urna hay 4 bolas blancas, 2 bolas negras y 3 bolas rojas.
   a. Extraemos, una a una y sin devolverlas a la urna,3 bolas. ¿Cúal es la probabilidad de que las tres bolas extraídas sean rojas? (0,012)
   b. Extraemos,una a una y devolviéndolas a la urna, 2 bolas.¿Cúal es la probabilidad de que ninguna sea negra?(0,605)

4- En una clase, el 15% de los alumnos suspendió Mate, el 5% suspendió Literatura y el 10% suspendió Mate y Literatura.Se selecciona un estudiante al azar y se pide:
   a. Si suspendió Literatura, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido tambien Mate? (0,67)
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya suspendido ninguna de las dos asignaturas? (0,7)

5- En un instituto hay matriculados 350 alumnos, 70 de los cuales estan estudiando 2°curso. Se selecciona al azar un alumno.Sabiendo que un 70% de los alumnos de 2° no hablan inglés y que un 20% de los alumnos que no son de 2° lo hablan, determinar la probabilidad de que el alumno seleccionado hable inglés.(0,22)

6- En una población, la probabilidad de que una persona practique algun deporte es 0,2; la probabilidad de que una persona tome algun tipo de bebidas alcoholicas es de 0,3 y la probabilidad de que una persona haga ambas cosas es de 0,08. Se toma una persona al azar, se pide.

   a-Pr de que no haga deporte y tome alcohol.(0,22).
   b-Pr de que no haga deporte y no tome alcohol. (0,58).
   c-Que haga deporte y no tome alcohol.(0,12)

7- Las 5 bolas blancas y las 7 bolas negras de una urna tienen la misma Pr. de ser extraídas. Se sacan 4 bolas sucesivamente y con reemplazamiento. Hallar la Pr de que las 4 sean del mismo color.(0,1459).

8- A un alumno le llevan en coche a la facultad el 80% de los días. Cuando le lleva en coche llega tarde el 20% de los días. Cuando no le llevan, llega temprano a clase el 10% de los días.Calcular:
   1- La Pr de que llegue pronto a clase y le lleven. (0,64).
   2- Pr de que llegue tarde a clase.(0,34).
   3- Ha llegado pronto a clase. ¿Cuál es la Pr de que no le hayan llevado?(0,03)

9- En una rifa con 500 papeletas, 75 tienenpremio de 100 euros, 150 tienen premio de25 euros y 275 un premio de 10 euros.Se elige una papeleta al azar, calcula la Pr de que:
   1- Se obtenga un premio de 25 euros. (3/10)
   2- Se obtenga un premio menor de 100 euros.(17/20)

10- Juan es el responsable de un aula de informática en una empresa y no se puede confiar en el pues la Pr de que olvide hacer el mantenimiento de un ordenador en ausencia del jefe es 2/3. Si hace el mantenimiento, este tiene la misma Pr de estropearse que de funcionar correctamente, pero si no le hace el mantenimiento solo hay una Pr de 0,25 de funcionar correctamente.
   1- ¿Cúal es la Pr de que un ordenador funcione correctamente a la vuelta del jefe? *(1/3)*
   2- A su regreso el jefe se encuentra un ordenador averiado, ¿cúal es la Pr de que Juan no le hiciera el mantenimiento?.(3/4)

11- En una empresa se ha contratado a tres personas. La primera de ellas hace el 30%; la segunda el 45%, y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las inspecciones realizadas por la primera persona, el 1% son erroneas; la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.
   1- Calcula la Pr de que, al elegir al azar una inspección, esta sea erronea. *(0,0215)*
   2- Al elegir una inspección correcta,¿cúal es la Pr de que la haya realizado la segunda persona? *(0,4461)*

12- Calcula P(A U B) y P(A B), sabiendo que P(A U B) – P/A B)= 0,4 P(A)=0,6 Y P(B)= 0,8 *(0,9 y 0,5)*

13-Tenemos dos bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón, y la segunda, 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcula:
   a- La Pr de que el caramelo sea de naranja. *(47/90)*
   b- Si el caramelo elegido es de limón, ¿cúal es la probabilidad de que lo hayamos extraído de la segunda bolsa? *(25/43)*

14- En cierta ciudad residen 10000 personas, de ellas 4000 son mayores de 50 años. Como resultado de una encuesta realizada en dicha ciudad, se ha determinado que 70 de cada 100 personas mayores de 50 años no se hacen ninguna revisión dental anual. Determinar la probabilidad de que elegida al azar una persona en esta ciudad resulte ser mayor de 50 años y de las que se hace una revisión anual. *(0,12)*

ACADEMIA
EPSILON
ANA I. MORENO
(94) 449 47 44
48970 BASAURI

15-La plantilla de empleados de unos grandes almacenes esta formada por 200 hombres y 300 mujeres. La cuarta parte de los hombres y la tercera parte de las mujeres solo trabajan en el turno de mañana, Elegido uno de los empleados al azar:

a) ¿Cuál es la Pr de que sea hombre o solo trabaje en el turno de mañana? ***(3/5)***

b) Sabiendo que no solo trabaja en el turno de mañana, ¿cuál es la Pr de que sea mujer? ***(4/7)***

16-Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma, y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula:

1- La Pr de que un paciente no fumador sea hombre ***(0,4)***
2- La Pr de que un paciente sea hombre fumador ***(0,3)***
3- La Pr de que un paciente sea mujer ***(0,46)***

17-Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento cuatro huevos.

1- Calcular la Pr de extraer los 4 huevos en buen estado. ***(14/33)***
2- Calcular la Pr de extraer de entre los 4 , exactamente un huevo roto. ***(16/33)***

18- Una fábrica dispone de tres máquinas A,B y C que fabrican tornillos. Se sabe que la máquina A produce un 1% de tornillos defectuosos, la B un 3% y la C un 2%. La máquina A produce el 25% del total de unidades, la B el 40% y la C el 35%. Al cabo de un día, se toma un tornillo al azar de la producción total y se pide:

1- Calcular la Pr de que ese tornillo sea defectuoso. ***(0,0215)***
2- Si ha resultado defectuoso, calcular la Pr de que pertenezca a la máquina B ***(0,558)***

19- En una biblioteca hay dos estanterias con 100 libros cada una. En la primera hay 25 libros en mal estado y en la segunda 20. Un estudiante coge al azar yn libro de la primera estanteria y lo deja en la segunda.¿Cuál es la Pr de que otro estudiante coja al azar un libro en buen estado de la segunda estanteria? ***(0,8)***

20- El 25% de los aparatos que llegan a un servicio tecnico tienen garantía. Entre los que no tienen garantía, un 20% ya fueron reparados en otra ocasión. Finalmente, el 5% de los aparatos tienen garantía y ademas ya fueron reparados en otra ocasión.

1- ¿Qué porcentaje de los aparatos que llegan al servicio ya fueron reparados en otra ocasión? ***(20%)***

2- ¿Qué porcentaje no fueron reparados en otra ocasión y ademas no tienen garantía? ***(60%)***

3- Un aparato que acaba de llegar ya fue reparado en otra ocasión.¿Qué Pr hay de que tenga garantía? ***(0,25)***

21- Se hacen tres lanzamientos de un dado.Si en el primer lanzamiento sale un 2. ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o impar? ***(igual)***

22- Los sucesos A y B son independientes, la Pr de que ocurra alguno de ellos es 5/6y la de que ocurran ambos simultaneamente es 1/3. Hallar las Pr de A y de B. (Si P(B)=2/3 entonces P(A)=1/2 y si P(B)=1/2 entonces P(A)=2/3)

ACADEMIA
EPSILON
ANA I. MORENO

23- Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la Pr de que el componente A sea defectuoso es de 0,001 y la de que B no lo sea es de 0,997. Se elige al azar un elemento. Calcule la Pr de los siguientes sucesos:

1- Solo el componente A es defectuoso ***(0,000997)***
2- Ninguno de los componentes es defectuoso ***(0,996)***
3- Ambos componentes son defectuosos ***(0,000003)***
4- Solo uno de los componentes es defectuoso ***(0,003994)***

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1-La Pr de que una pareja tenga un niño es 4/10. Si sabemos que una pareja ha tenido 4 hijos y todos viven:

a- ¿Cúal es la Pr de que entre ellos haya 2 niños? ***(0,3456)***
b- ¿Cúal es la Pr de que entre ellos haya al menos 1 niña? ***(0,9744)***

2-Se lanza un dádo 720 veces.Calcula la Pr aproximada de que salgan, al menos, 110 seises ***(0,8531)***

3-En un instituto aprobaron Filosofía el 80% de los alumnos, Lengua el 85% y las dos asignaturas el 75%.

a- ¿Cúal es la Pr de que de un grupo de 8 alumnos, solo 2 hubieran suspendido Lengua? ***(0,2376)***

b- ¿Cúal es la Pr de que un alumno, del que se sabe que aprobó Filo, aprobase tambien Lengua? ***(0,9375)***

4-El 89% de los edificios de una ciudad tiene una sola antena.Supongamos que en una calle hay 15 edificios:

a-Describe la variable que representa el número de edificiosde la calle que tienen una sola antena.

b-¿Cúal es la Pr de que haya 11 edificios con solo una antena? ***(0,1876)***
¿Cuál es la Pr de que 14 o mas tengan solo una antena? ***(0,1671)***

5-Una variable aleatoria sigue una distribucion normal de media 4 y varianza 9:

a-Calcula $P(3{,}4<x<4{,}6)$ ***(0,1586)***

b-Encuentra un valor a tal que $P(4-6.a<x<4+6.a)=0{,}75$ ***(0,575)***

6-La Pr de que un cazador novato cobre una pieza es 0,4. Si lo intenta 5 veces, calcula la Pr de que cobre una pieza al menos 3 veces. ***(0,4096)***

7-El 70% de los alumnos de instituto tiene teléfono.móvil

a-Si un instituto tiene 1400 alumnos, ¿cuántos se espera que tengan teléfono móvil? ***(980)***

b-¿Cúal es la Pr de que en una muestra de 150 alumnos, haya más de 100 con teléfono móvil? ***(0,7881)***

c-¿Cúal es la Pr de que en una muestra de 200 alumnos, haya como máximo 140 con teléfono móvil? ***(0,5319)***

ACADEMIA
ÉPSILON
JOSE I. RAMOS ANA I. MORENO
Tel. (94) 440 31 94 · (94) 440 47 44
Uribarri, 12 - 48970 BASAURI

8-Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población es una distribucion normal de media 37°C y de desviacion tipica 0,85°C. Se elige una muestra de 105 personas y se pide:

a-Calcular la Pr de que la temperatura media sea menor de 36,9°C *(0,1151)*

b-Calcular la Pr de que la temperatura media este comprendida entre 36,5 y 37,5°C *(1)*

9-La talla de los recien nacidos se distribuye normalmente, pero mientras que en la Comunidad Autónoma A la media es de 52 cm y la desviación típica de 3cm, en la B es de 53cm y la desviación típica de 5cm.

a-Hallar, en el primero de los casos,entre que valores simétricos respecto a la media está el 50% (central) de las tallas de los recien nacidos. *(49,99 ; 54,01)*

b-Determinar en cuál de las dos comunidades es mayor la proporción de recien nacidos con talla superior a 50 cm.

INTERVALOS DE CONFIANZA

1-En una poblacion una variable aleatoria sigue una ley normal de media desconocida y desviacion tipica 2.

a-Observada una muestra de tamaño 400, se ha obtenido una media muestral igual a 50.Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población. *(49,783 ; 50,217)*

b-Con el mismo nivel de confianza,¿qué tamaño minimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1? *(76)*

2-Una variable estadistica se comporta como una N(u, 10).Para estimar u extraemos una muestra de tamaño 100, cuya mediaes 37.Se pide:

1. Estimar u mediante un intervalo de confianza del 90%. *(35,355 ; 38,645)*
2. Estimar u mediante un intervalo de confianza del 95%. *(35,04 ;38,96)*
3. Determinar el tamaño de la muestra si deseamos que el error cometido al estimar u con un nivel de confianza del 99% no exceda a 0,2575. *(10000)*

3-Una maquina de refrescos esta ajustada de tal manera que la cantidad de liquido despachada se distribuye en forma normal con una desviacion tipica de 0,15 decilitros

1.Encuentra un intervalo de confianza del 97% para la media de todos los refrescos que sirve esta maquina, si una muestra aleatoria de 36 refrescos tiene un contenido promedio de 2,25 decilitros. *(2,2 ; 2,3)*

2.Interpreta el significado del intervalo obtenido.

4-El peso de los alumnos de bachillerato de una cierta ciudad tiene una media desconocida y una desviación típica de 5,4 Kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 alumnos de bachillerato de esa ciudad.

a) Si la media de la muestra es de 60Kg, calcular con un nivel de confianza del 99% el intervalo de confianza para el peso medio de todos los alumnos de bachillerato de la ciudad. *(58,6095 ; 61,3905)*
b) Se realiza la siguiente afirmacion:"el peso medio de los alumnos de bachillerato de esa ciudad está comprendido entre 59 Y 61 Kg". ¿Con qué nivel de confianza se hace esa afirmación? *(93,56%)*

ACADEMIA
EPSILON
JOSE · RAMOS ANA · MORENO
Tel (94) 440 31 94 · (94) 449 47 44
Iibarn 12 · 48970 BASAURI

5-Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador del transporte público.Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros:

a) Con un nivel de confianza del 90%, determinar el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del trasporte público. ***(1463,55;1496,45)***
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99%. ***(4145)***

6-Un fabricante de pilas alcalinas afirma que la desviación típica de la duración de las pilas es de 80 horas.

a)Si α=0,1 y, en una muestra de 50 pilas, la duración media es de 500 horas, determinar el intervalo de confianza para la duración media poblacional. ***(481,39;518,61)***

b)Si la duración de las pilas es una N(500,80).¿Cuál es la Pr de que la duración media de 9 pilas sea mayor de 520 horas? ***(0,2266)***

7-El tiempo que tardan las cajeras en cobrara los clientes es una N(μ;0,5).Para una muestra de 25 clientes se obtuvo un tiempo medio de 5,2minutos.

a) Calcula el intervalo de confianza al nivel del 95% para el tiempo medio que se tarda en cobrar a los clientes. ***(5,004;5,396)***

b)Indica el tamaño muestral necesario para estimar dicho tiempo medio con un error de ±0,5 minutos y un nivel de confianza del 95% ***(4)***

8-En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros leen al año, obteniendose una media de 5 libros .Se sabe que la población gigue una distribución normal de σ=2.

a) Hallar un intervalo de confianza al 80%para la media poblacional. ***(4,9744;5,0256)***
b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior al 0,25 con un nivel de confianza del 95%, ¿a cuántas personas como mínimo seria necesario entrevistar? ***(246)***

9- Para una población N(μ,σ=25), ¿qué tamaño muestral mínimo es necesario para estimar μ mediante un intervalo de confianza, con un error menor o igual que 5 unidades, y con una Pr mayor o igual que 0,95? ***(97)***

10-Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia. obteniendose una media de 100 puntos. Se sabe que la variable inteligencia sigue una normal de dsviación 10. ¿Entre que límites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes. con un nivel de confianza de 0,99? ***(94,85 ; 105,15)***

11-La puntuación que obtienen los niños en cierto test psicológico sigue una distribución N(μ; 35).Sabiendo que en la muestra de 50 niños se observó una media de 75 puntos, a- calcular un intervalo de confianza del 90% para la media poblacional. *(66,86 ; 83,14)ç*

b- calcular un intervalo de confianza del 94% para la media poblacional *(65,7 ; 84,3)*

12- La talla de los recien nacidos en la comunidad A es una N(52 , 3) y en la B es N(53,5).

a- Hallar entre que valores simétricos respecto de la media está el 50%(central) de las tallas de los recien nacidos de la comunidad A. ***(49,99 ; 54,01)***

b-Determinar en cuál de las dos comunidades es mayor la proporción de recién nacidos con talla superior a 50 cm. ***(mayor en A)***

13-En una fábrica de componentes electrónicos, la proporción de componentes finales defectuosos era del 20%. Tras una serie de operaciones e inversiones destinadas a mejorar el rendimiento se analizó una muestra aleatoria de 500 componentes, encontrándose que 90 de ellos eran defectuosos.¿Qué nivel de confianza debe adoptarse para aceptar que el rendimiento no ha sufrido variaciones? ***(73,72%)***

14- En una ciudad la desviación típica del gasto medio semanal de los jóvenes es de 6 euros. Elegidos 100 jóvenes, su gasto medio semanal es de 25 euros. Determinar el intervalo de confianza del 95% para dicho gasto medio, explicando los pasos realizados para obtener el resultado. ***(23,824 ; 26,176)***

ACADEMIA
LON
ANA I MORENO
(94) 449 47 44
48970 BASAURI