BATX 2	1. EBALUAKETAKO AZTERKETA	2025/11/10
IZEN-ABIZENAK: ______________________________		TALDEA: ____

- Ariketa bakoitzak **2 puntu** balio du.
- Proba **txukun** aurkeztuta egotea aintzat hartuko da.
- Balorazio positiboa emango zaie problema eta soluzioa ulertzeko lagungarriak izan daitezkeen ideiei, grafikoei, aurkezpenei, eskemei, etab.
- Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea.
- Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
- Azalpen falta, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahiari dagokionean, negatiboki baloratuko da.
- Negatiboki baloratuko da zehaztasun matematikoaren eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desegokia, **ariketa bakoitzean 0,2 puntura arteko penalizazioarekin.**

1.ARIKETA: LIMITEAK ETA DERIBAZIO TEKNIKAK

A) Kalkulatu ondorengo limiteak indeterminazioak identifikatuz balego eta arrazoituz lortutako emaitza.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{sin^2x} = \frac{e^0-0-1}{sin^2 0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2\sin x\cdot\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2(\cos^2x-\sin^2x)} = \frac{e^0}{2(\underbrace{\cos^2 0}_{1}-\underbrace{\sin^2 0}_{0})} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^2-x-6}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2}\sqrt[6]{\frac{(x^2+2x)^3}{(x^2-x-6)^2}} = \lim_{x\to -2}\sqrt[6]{\frac{x^3(x+2)^3}{(x-3)^2(x+2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\sqrt[6]{\frac{x^3(x+2)}{(x-3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{0}{25}} = \boxed{0}$$

B) Kalkulatu hurrengo deribatuak eta laburtu ahalik eta gehien lortutako adierazpenak (1 puntu)

$f(x) = Ln(cos(x^2+1)) + tg(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x^2+1)}{\cos(x^2+1)}\cdot 2x + (1+tg^2(x^2+1))\cdot 2x$$

$$= -tg(x^2+1)\cdot 2x + (1+tg^2(x^2+1))2x = \underline{2x\cdot(tg^2(x^2+1) - tg(x^2+1) + 1)}$$

$f(x) = (1+x^2)^2 \cdot arctg\, x + \frac{1}{3}Ln(x^3+3x)$

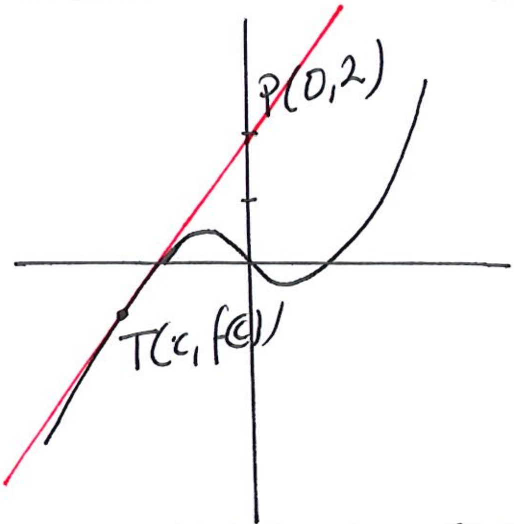
$$f'(x) = 2(1+x^2)\cdot 2x\cdot arctg\,x + (1+x^2)^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x^2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2+3}{x^3+3x} =$$

$$= 4x(1+x^2)\cdot arctg\,x + (1+x^2) + \frac{x^2+1}{x^3+3x} =$$

$$= (1+x^2)\left[4x\cdot arctg\,x + 1 + \frac{1}{x^3+3x}\right] = \underline{(1+x^2)\cdot\left(4x\cdot arctg\,x + \frac{x^3+3x+1}{x^3+3x}\right)}$$

2.ARIKETA

Honako kurba hau izanik $f(x) = x^3 - x$, aurkitu zer puntuan ukitzen duen P(0,2) puntutik igarotzen den zuzen ukitzaileak. Kalkulatu zuzen ukitzaile horren ekuazioa.



· Zuzen ukitzaileoren ekuazioa

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

· Malda kalkulatzeko $m = f'(x_0)$

eta $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ non puntuak P(0,2) eta T(c, f(c)) diren.

· Malda: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \boxed{\frac{c^3 - c - 2}{c - 0}}$

P(0,2) eta T(c, $c^3 - c$)

· Deribatua puntuan: $f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(c) = \boxed{3c^2 - 1}$

$$\frac{c^3 - c - 2}{c} = 3c^2 - 1$$

· Ekuazioa ebatzi

$$\frac{c^3 - c - 2}{c} = 3c^2 - 1 \Rightarrow c^3 - \cancel{c} - 2 = 3c^3 - \cancel{c}$$

$$-2 = 2c^3$$

$$c^3 = -1 \rightarrow \boxed{c = -1}$$

· Ukitze puntua

$\boxed{T(-1, 0)}$

$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = 0$

· Malda $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2$.

$\boxed{m = 2}$

$y = 0 + 2(x + 1)$

$\boxed{y = 2x + 2}$ zuzen ukitzailea.

Ukitze puntua $(-1, 0)$

3.ARIKETA

Izan bedi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioa.

a) Kalkulatu a,b,c Є R jakinik, x= 1 abzsiza duen puntua inflexio puntua dala, x= 2 abzsisa duen puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea y=3x-1 zuzenaren paraleloa dala. Gainera $f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(x-1)}$ da.

b) $a = 1$, $b = -1$ eta $c = 1$ izanik:

Izan daiteke, x = 1 abziza duen puntuan zuzen ukitzailea, x+4y=4 zuzenarekiko perpendikularra izatea? Arrazoitu erantzuna.

a) X=1 INFLEXIO PUNTUA : Inflexio puntuetan $f''(x_0)=0$ eta $f'''(x_0) \neq 0$ beraz: $\boxed{f''(1)=0}$

ZUZEN UKITZAILEA X=2 DENEAN // $y=3x-1$

Bi zuzen paraleloak badira malda berdina daukie. Bi zuzen paraleloak bodire moldo berdi co daukie. Puntu bateaa $m=f'(x_0)$ da eta ukitzaileoren malda puntu bateaa $m=f'(x_0)$ da

$y=3x-1$ -ren malda $m=3$ denez $\longrightarrow$ $\boxed{f'(2)=3}$

$f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\sin(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{=}{H} = \lim \frac{e^{x-1}}{\cos(x-1)} = 1 \Rightarrow \boxed{f(1)=1}$

$f(x) = x^3+ax^2+bx+c$
$f'(x) = 3x^2+2ax+b$
$f''(x) = 6x+2a$

$f(1)=1 \longrightarrow 1+a+b+c=1$
$f'(2)=3 \longrightarrow 12+4a+b=3$
$f''(1)=0 \longrightarrow 6+2a=0$ $\longrightarrow \boxed{a=-3}$

$12-12+b=3 \longrightarrow \boxed{b=3}$
$1-3+3+c=1 \longrightarrow \boxed{c=0}$

EMAITZA
$a=-3$ $b=3$ $c=0$
$f(x) = x^3-3x^2+3x$

b) Funtzioa $\longrightarrow$ $f(x)=x^3+x^2-x+1$

$f'(x)=3x^2+2x-1 \longrightarrow f'(1)=3\cdot1^2+2\cdot1-1=4$

Zuzen ukitzaileoren malda $m=f'(x_0)$ da beraz $\underline{m=f'(1)=4}$

Bi zuzen $\perp$ badira $m_1 \cdot m_2 = -1$, eta $x+4y=4$ zuzenaren malda $\left(y=\frac{4-x}{4}\right) \longrightarrow \underline{m=-1/4}$ da

Berat: $m_1 \cdot m_2 = -1$
$4\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)=-1$ betetzen danez

PERPENDIKULARRAK dira

4.ARIKETA

a) Aztertu $f(x)=\frac{x^2}{x-5}$ funtzioaren gorakortasun eta beherakortasun tarteak, eta kalkulatu haren puntu singularrak eta aztertu zein motatakoak diren.

b) Aztertu $g(x) = x^3 \cdot e^{2x}$ funtzioaren kurbatura eta inflexio puntuak.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-5}$

Hazkundea aztertzeko f'(x) kalkulatzea izango da.

$\begin{cases} f'(x)>0 & \text{GORAKORRA} \\ f'(x)<0 & \text{BEHERAKORRA} \\ f'(x)=0 & \text{Puntu sing} < \text{max, min, IP.} \end{cases}$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{5\}$

$$f'(x)=\frac{2x(x-5)-x^2}{(x-5)^2}=\frac{2x^2-10x-x^2}{(x-5)^2}=\frac{x^2-10x}{(x-5)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-10x}{(x-5)^2}=0 \longrightarrow x^2-10x=0$$
$$x(x-10)=0 \quad \boxed{x_1=0,\; x_2=10}$$ Ptu singularrak

		0		5		10	
f'(x)	f'>0		f'<0		f'<0		f'>0
f(x)	↗	MAX	↘	AB	↘	MIN	↗

$x=0 \rightarrow f(0)=0 \quad (0,0)$ MAX ERL.

$x=10 \rightarrow f(10)=20 \quad (10,20)$ MIN ERL.

GORAKORT. TARTEAK $(-\infty,0)\cup(10,+\infty)$

BEHERAKORT. TARTEAK $(0,5)\cup(5,10)$

MAX ERLATIB. $(0,0)$

MIN ERLATIB $(10,20)$

b) $g(x) = x^3 \cdot e^{2x}$

Kurbadura aztertzeko $g''(x)$ kontutan hartu behar da:

$$\begin{cases} g'' > 0 & \text{AHURRA } \cup \\ g''(x) < 0 & \text{GANBILA } \cap \\ g''(x) = 0 & \text{INF PUNT baldin eta } g'''(x) \neq 0. \end{cases}$$

Dom f = $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot 2 \cdot e^{2x}$$

$$g'(x) = e^{2x}(2x^3 + 3x^2)$$

$$g''(x) = 2 \cdot e^{2x}(2x^3 + 3x^2) + e^{2x}(6x^2 + 6x) =$$

$$= e^{2x}(4x^3 + 6x^2) + e^{2x}(6x^2 + 6x) =$$

$$= e^{2x}(4x^3 + 6x^2 + 6x^2 + 6x)$$

$$\boxed{g''(x) = e^{2x}(4x^3 + 12x^2 + 6x)}$$

$$g''(x) = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} e^{2x}(4x^3 + 12x^2 + 6x) = 0 \\ e^{2x} \cdot 2x(2x^2 + 6x + 3) = 0 \end{array} \quad \begin{cases} e^{2x} \neq 0 \\ \boxed{x_1 = 0} \\ 2x^2 + 6x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + 6x + 3 = 0 \qquad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} = \boxed{-0{,}63}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} = \boxed{-2{,}37}$$

		-2,37		-0,63		0	
$g''(x)$	$g'' < 0$		$g'' > 0$		$g'' < 0$		$g'' > 0$
$g(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

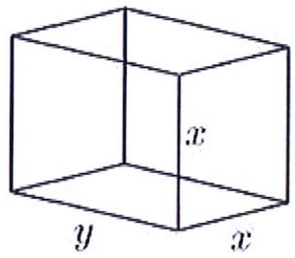
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{AHURRA } \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) \cup (0, +\infty) \\ \text{GANBILA } \left(-\infty, -\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ \text{INF. PUNTUAK } \quad x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \; x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}, \; x_3 = 0. \end{array}}$$

5

5.ARIKETA

AUKERATU HURRENGO BI ARIKETETATIK BAT

5.A. Enpresa batek estalkirik gabeko 3 m² -ko kartoizko kutxak egiten nahi du. Kutxek alboko bi aurpegi karratu paralelo izango ditu, x aldekoa. Gainerako aurpegi laukizuzenen aldeak x eta y izango dira irudian agertzen den bezala. Kalkulatu x eta y-ren balioak balioak kutxaren edukiera (bolumena) maximizatzeko.



5.B. Katilu zilindrikoen fabrikaziorako ikerketa bat egitea eskatu digute. Baldintza gisa, haien edukierak 216 cm³ izan behar duela ezarri dute. Enpresak fabrikazioa ahalik eta merkeena izatea nahi du.
(a) Kalkulatu fabrikaziora bidali beharreko neurrien zehaztapenak helburua lortzeko.
(b) Katiluak kanpoaldetik koloreztatu egingo dira, eta horretarako erabiliko den materialaren kostua 3 €/m² da. Kalkulatu katilu bat koloreztatzeko kostua.

$\boxed{5A}$

FUNTZIOA OPTIMIZATZEKO: Prismaren bolumena (maximoa)
DATUA : Prismaren azalera $3m^2$
ALDAGAIAK: x, y (dimentsioen neurriak)

PRISMAREN BOLUMENA $B(x,y) = x^2 y$

DATUA $A = 3m^2$

$$A = 3xy + 2x^2$$
$$3 = 3xy + 2x^2$$
$$y = \frac{3-2x^2}{3x}$$

• BOLUMENA (Aldagai bakarra):

$$B(x) = x^{\cancel{2}} \cdot \frac{3-2x^2}{3\cancel{x}} = \frac{(3-2x^2)\cdot x}{3} = \frac{1}{3}(3x-2x^3)$$

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{3}(3x-2x^3)} \quad x>0$$

- Maximoa lortzeko:

$B'(x) = 0$ eta $B''(x) < 0$. Izan behar da.

$$B'(x) = \frac{1}{3}(3 - 6x^2) = 1 - 2x^2$$

$$1 - 2x^2 = 0 \rightarrow 1 = 2x^2 \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ez da posible $x > 0$ delako.

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ frogatu behar da ea funtzioaren maximoa dan.

- Maximoa dan frogatzeko: $B''(\frac{\sqrt{2}}{2}) < 0$ izan behar da:

$$B''(x) = -4x$$

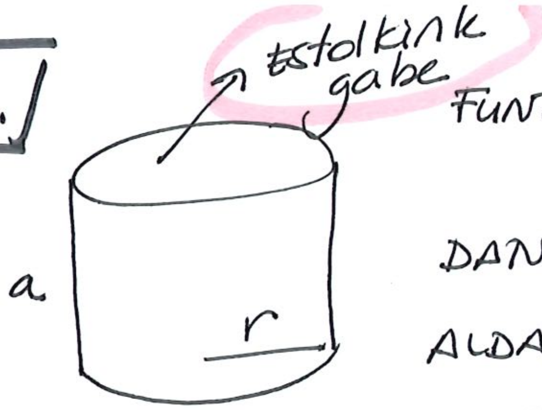
$B''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \longrightarrow$ Beraz $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m denean edukiera maximoa da.

- Emaitza.

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow y = \frac{3 - 2 \cdot (\sqrt{2}/2)^2}{3\sqrt{2}/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Edukiera maximoa izango da neurriak $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ eta $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$ m direnean

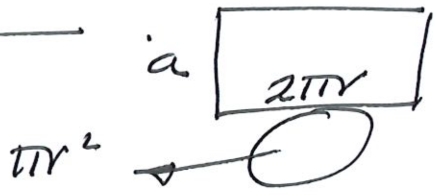
5B.



FUNTZIOA : FABRIKAZIO MERKEENA (AZALERA GUTXIENA)

DANA : EDUKIERA 216 cm^3.

ALDAGAIAK : r, a



- Zilindroaren azalera

$$A = A_{OINARRIA} + A_{ALBOKOA}$$

$$A(r,a) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot a.$$

- Datuaren bitartez, bi aldagaietako funtzioa, aldagai bakarrekoa bihurtuko da.

$$B = \pi r^2 \cdot a$$

$$216 = \pi r^2 \cdot a \longrightarrow \boxed{a = \frac{216}{\pi r^2}}.$$

- Funtzioa aldagai bakarra bihurtu, eta optimizatuko da funtzioa:

$$A(r) = \pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{216}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{A(r) = \pi r^2 + \frac{432}{r}}$$

- Azalera gutxiena kalkulatzeko: $A'(r) = 0$.

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{432}{r^2} \qquad 2\pi r - \frac{432}{r^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{432}{r^2} \qquad \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{432}{2\pi}} = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}}.$$

- Konprobatzeko $r = 6/\sqrt[3]{\pi}$ denean minimoa dela.

$A''\left(\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$ izan behar da.

8

$A''(r) = 2\pi + \frac{432 \cdot 2}{r^3}$

$A''\left(\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{432 \cdot 2}{6^3/\pi} > 0 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Funtzioaren minimoa da } r = 6/\sqrt[3]{\pi}}$

a) Fabrikazioa ahalik eta merkeena izateko.

$\boxed{r = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ cm}}$ eta $a = \frac{216}{\pi(6/\sqrt[3]{\pi})^2} = \frac{6}{\pi/\sqrt[3]{\pi^2}} = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm

b) Kobraztatuko kostua.
Suposatuko da zilindroaren alboko azalera
eta oinarria margoztuko dela

$A = \pi r^2 + \frac{432}{r}$

$A = \pi \cdot \left(\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 + \frac{432}{6/\sqrt[3]{\pi}} = \sqrt[3]{\pi}(36 + 72) = 108\sqrt[3]{\pi}$
$= 158,18 \text{ cm}^2$

PREZIOA $= 3 \cdot 158,18 = \boxed{474,53 \text{ cm}^2}$