MATEMATIKA II 1.EBALUAKETA – PARTZIALA 2025/10/14 **IZEN-ABIZENAK:________________________________ TALDEA:**	

Proba ***txukun*** *aurkeztuta egotea aintzat hartuko da.*

Balorazio positiboa emango zaie problema eta soluzioa ulertzeko lagungarriak izan daitezkeen ideiei, grafikoei, aurkezpenei, eskemei, etab. eta ***jarraitutako pausuak arrazoitzea.***

Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea, zehaztasun matematikoaren eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desegokia.

1. Kalkulatu ondorengo limiteak (**L´Hopital erabili barik**), indeterminazioak identifikatuz eta emaitza arrazoituz

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4}{3x^2+3x}\right)^{\frac{x+1}{2}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\,g(x)}$ (2 puntu)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4}{3x^2+3x}-1\right)\cdot\frac{x+1}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3x^2}-4-(\cancel{3x^2}+3x)}{3x^2+3x}\cdot\frac{x+1}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(-3x-4)(x+1)}{2\cdot(3x^2+3x)} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$= -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ Mailo bereko polinomioak berat a/b. $\Longrightarrow$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-4}{3x^2+3x}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}}$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x^2-3x)(\sqrt{x-2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{x-2})^2-1^2}{(x^2-3x)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x\to3}\frac{x-2-1}{(x^2-3x)(\sqrt{x-2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x^2-3x)(\sqrt{x-2}+1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\cancel{x-3}}{x(\cancel{x-3})(\sqrt{x-2}+1)} = \lim_{x\to3}\frac{1}{x(\sqrt{x-2}+1)} =$$

$$= \frac{1}{3(1+1)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

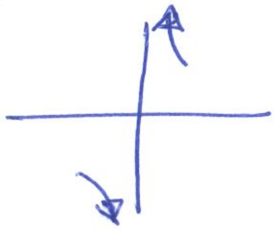
2. Kalkulatu ondorengo limiteak indeterminazioak identifikatuz eta emaitza arrazoituz (2puntu)

$\lim_{x\to 1} \frac{Lnx}{(x-1)^2} =$ $\frac{\ln 1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2(x-1)} = \left(\frac{1}{0}\right)$

0,99 1 1,01

$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$



$\lim_{x\to +\infty} \frac{Lnx}{(x-1)^2} =$ $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underline{\underline{0}}$

Berekatu infinituan, logaritmoa ∞ baino orden gorenekoa da.

BAITA $\Rightarrow \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{2(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{0}{\infty} = \underline{\underline{0}}$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{Lnx}{(x-1)^2} =$ $\nexists$

Ez da existitzen logaritmoen argumentoa ezin daiteko negatiboa izan.

3. Kalkulatu ondorengo limiteak indeterminazioak identifikatuz eta emaitza arrazoituz (2puntu)

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sinx} =$ $\frac{e^0 - e^0 - 2\cdot 0}{0 - \sin 0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^0 + e^{-0} - 2}{1 - \cos 0}$

$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \underline{\underline{2}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos^2x}{2x^2} =$ $\frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x(-\sin x)}{4x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Deribatu hurrengo funtzioak <u>deribazio-erregelak</u> erabiliz eta laburtu ahalik eta gehien. (1,5 puntu)

a) $f(x) = arctg\left(\frac{x}{3}\right) + Ln\,(x^2+9)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x/3)^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2x}{(x^2+9)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{9+x^2}{9}} + \frac{2x}{x^2+9} =$$

$$= \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}}\,\frac{1}{9+x^2} + \frac{2x}{x^2+9} = \boxed{\frac{3+2x}{x^2+9}}$$

b) $f(x) = Ln\sqrt[4]{\frac{e^x\cdot(x^2+1)}{sinx}}$ $= \frac{1}{4}\left(\ln e^x + \ln(x^2+1) - \ln \sin x\right) =$

$$= \frac{1}{4}\left[x \overset{1}{\cancel{\ln e}} + \ln(x^2+1) - \ln \sin x\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{tg\,x}\right)$$

c) $f(x) = cos^2(3x^2-4x) + tg\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$f'(x) = 2\cos(3x^2-4x)\cdot(-\sin(3x^2-4x))\cdot(6x-4) + \frac{1(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}\cdot\left(1+tg^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

$$= -2(6x-4)\,\sin(3x^2-4x)\cdot\cos(3x^2-4x) - \frac{2}{(x-1)^2}\left(1+tg^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

5. Deribatu deribazio logaritmikoa erabiliz (1 puntu)

$y = (arctg\;x)^{1+x^2}$

$$\ln y = \ln arctg\,x^{1+x^2}$$

$$\ln y = (1+x^2)\ln arctg\,x$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln arctg\,x + \cancel{(1+x^2)}\,\frac{1}{arctg\,x}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x^2}}$$

$$y' = (arctg\,x)^{1+x^2}\left[2x\cdot\ln arctg\,x + \frac{1}{arctg\,x}\right]$$

$$y' = (arctg\,x)^{x^2}\left[arctg\,x\cdot 2x\cdot\ln arctg\,x + 1\right]$$

6. Aztertu a eta b parametroen balioak $f(x)$ funtzioa deribagarria izan daiten R osoan. Arrazoitu emondako pausu guztiak. (1,5 puntu)

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x & x \leq 0 \\ \dfrac{b}{x+1} & x > 0 \end{cases}$$

f(x) deribagarria izateko JARRAIA eta albo deribatuok berdinak eta finituak izan behar dire.

1.) Definizio eremua

$f_1(x) = a - 2x$ Fu polinomikoa → Dom $f_1(x) = \mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{b}{x+1}$ → Dom $f_2(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Beraz bi funtzioak, $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ jarraiak eta deribagarriak dira dagokien tartetan

2) JARRAITASUNA.

Jarraitasuna aztertuko da $x=0$ denean. Jarraia izateko puntu batean $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ izan behar da.

I) $f(0) = a - 2\cdot 0 = a$

II) $\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} a - 2x = a \\ \lim_{x \to 0^+} \dfrac{b}{x+1} = b \end{cases}$

limiteak existituko albo limiteak berdinak eta finituak izan behar dira beraz,

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \boxed{a = b}$

3) DERIBAGARRITASUNA

Deribagarria izateko albo deribatuok berdinak eta finituak izan behar dire

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ \dfrac{-b}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -2$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -b$

$\boxed{b=2}$

$f'(0^-) = f'(0^+) \to \boxed{b = 2} \Rightarrow \boxed{a = 2}$

Beraz jarraia eta deribagarria izateko $\mathbb{R}$ osoan $a = b = 2$ izan behar da.