BATX 2	**1. EBALUAKETAKO ERREKUPERAKETA**	**2025/11/24**
IZEN-ABIZENAK: ______________________		**TALDEA:** ____

BEGOÑAZPI IKASTOLA

- Ariketa bakoitzak **2 puntu** balio du.
- Proba **txukun** aurkeztuta egotea aintzat hartuko da.
- Balorazio positiboa emango zaie problema eta soluzioa ulertzeko lagungarriak izan daitezkeen ideiei, grafikoei, aurkezpenei, eskemei, etab.
- Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea.
- Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
- Azalpen falta, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahiari dagokionean, negatiboki baloratuko da.
- Negatiboki baloratuko da zehaztasun matematikoaren eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desegokia, **ariketa bakoitzean 0,2 puntura arteko penalizazioarekin**.

1.ARIKETA: LIMITEAK ETA DERIBAZIO TEKNIKAK

A) Kalkulatu ondorengo limiteak indeterminazioak identifikatuz balego eta arrazoituz lortutako emaitza.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1+\cos x)}{x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos x + x(-\sin x)} = \frac{2}{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos x} = \frac{e^0-e^0}{1-\cos 0} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cdot\cos x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(e^{\sin x}\cdot\cos^2 x + e^{\sin x}(-\sin x)\right)}{\cos x} = \frac{1-(1+0)}{1} = \underline{\underline{0}}$$

B) Kalkulatu hurrengo deribatuak eta laburtu ahalik eta gehien lortutako adierazpenak (1 puntu)

$$y = \cos^2(3x) + e^{-2x}\cdot\sin(3x) = [\cos(3x)]^2 + e^{-2x}\cdot\sin(3x)$$

$$y' = 2\cos(3x)(-\sin(3x))3 + \left(-2e^{-2x}\sin(3x) + e^{-2x}\cdot 3\cdot\cos(3x)\right)$$

$$= -3\sin(6x) + e^{-2x}(-2\sin(3x) + 3\cos(3x))$$

$$y = \sqrt{\sin(2x)} + \ln\sin(2x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\sin 2x}}\cdot\cos(2x)\cdot\cancel{2} + \frac{\cos(2x)\cdot 2}{\sin(2x)} =$$

$$\cos(2x)\left(\frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin(2x)}\right) = \frac{\cos 2x}{\sin(2x)}\left(\sqrt{\sin 2x}+2\right)$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(2x)}\left(\sqrt{\sin 2x}+2\right) = \operatorname{cotg}(2x)\left(\sqrt{\sin 2x}+2\right)$$

B) EMAITZA:

$\boxed{\text{Maximoa dauka } x=1 \text{ denean eta minimoa } x=1/3 \text{ denean.}}$

2.ARIKETA (EBAU 2021 OHIKOA-B3)

Izan bedi $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$

A) Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f-ren grafikoa (0,1) puntutik pasa dadin eta minimo bat izan dezan (1,1) puntuan.

B) Lortutako funtzioak beste maximo edo minimorik al du? Horrela bada aurkitu.

A) (0,1) puntutik pasatzeko

$x=0$ denean $\rightarrow y=1 \longrightarrow \boxed{f(0)=1}$

(1,1) minimoa da.

$x=1$ denean $\rightarrow y=1 \longrightarrow \boxed{f(1)=1}$

Minimo denez:

$f'(x)=0 \rightarrow f''(x)>0 \longrightarrow \boxed{f'(1)=0.}$

Beraz: $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A$

$f'(x)=3Ax^2+2Bx+C$

$f(0)=1 \longrightarrow A\cdot 0^3+B\cdot 0^2+C\cdot 0+A=1 \longrightarrow \boxed{A=1.}$

$f(1)=1 \longrightarrow A\cdot 1^3+B\cdot 1^2+C\cdot 1+A=1$

$A+B+C+A=1.$

$\cancel{1}+B+C+1=\cancel{1} \longrightarrow B+C=-1$

$f'(1)=0 \longrightarrow 3\cdot A\cdot 1^2+2\cdot B\cdot 1+C=0$

$3A+2B+C=0$

$3+2B+C=0 \longrightarrow 2B+C=-3$

$$\left.\begin{array}{l} B+C=-1 \\ -\;\; 2B+C=-3 \end{array}\right\}$$

$-B=2$

$\boxed{B=-2} \rightarrow \boxed{C=1}$

$\boxed{\text{Emaitza} \quad A=1 \quad B=-2 \quad C=1}$

B) Maximo eta minimoetan $f'(x_0)=0$. beraz:

$f'(x)=3x^2-4x+1$

$3x^2-4x+1=0$

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}= \begin{cases} 1 \\ 1/3 \end{cases}$

$x=1/3 \quad f''(1/3)=6\cdot\frac{1}{3}-4=-2<0$

$f''(x)=6x-4$

$x=1/3$ denean $f''(\frac{1}{3})<0$ denez

$\boxed{x=1/3 \text{ MINIMOA da}}$

3.ARIKETA

a) Aurkitu $g(x) = x^3 - 3x + 4$ funtzioaren hazkundea eta mutur erlatiboak.

b) Aurkitu $h(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ funtzioaren hazkundea eta mutur erlatiboak.

c) Aurkitu $f(x)$ funtzioaren hazkundea eta mutur erlatiboak.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 4 & x < 0 \\ \frac{x^2-2x+2}{x-1} & x > 0 \end{cases}$$

A) $g(x) = x^3 - 3x + 4$ Dom $f = \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 3$

$g'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3(x^2-1) = 0 \longrightarrow x = \pm 1$ Puntu sing.

$g'(x)$: $g' > 0$ | -1 | $g' < 0$ | 1 | $g' > 0$

$g(x)$: ↗ MAX ↘ MIN ↗

MAX $(-1, 6)$
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$

MIN $(1, 2)$
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$

GT $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

BT $(-1, 1)$

B) $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

$h'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$

$h'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$h'(x) = 0 \longrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 < \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

$x = 1$ ez da deribagarria (AB.)

$h'(x)$: $h' > 0$ | 0 | $h' < 0$ | 1 (AB) | $h' < 0$ | 2 | $h' > 0$

$h(x)$: ↗ ↘ ↘ ↗

MAX. $(0, -2)$

MIN $(2, 2)$

GT $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

BT $(0, 1) \cup (1, 2)$

C) $g(x) \longleftarrow 1 \longrightarrow h(x)$

$g' > 0$ | -1 | $g' < 0$ | 0 | $g' < 0$ | 1 | $h' < 0$ | 2 | $h' > 0$

↗ MAX $(-1, 6)$ ↘ 0 ↘ ↘ MIN $(2, 2)$ ↗

$g(0) = 4$
$h(0) = -2$ } Jauzi finitoa

MAX $(-1, 6)$ MIN $(2, 2)$

GT $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

BT $(-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$

4.ARIKETA **Aukeratu bi ariketatik bat**

4.A (EBAU 2015 UZTAILA A3)

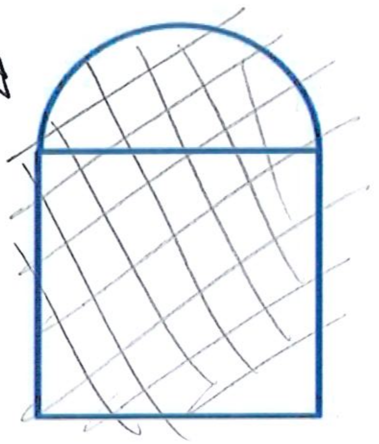
DATUA $5m^2$ = AZALERA

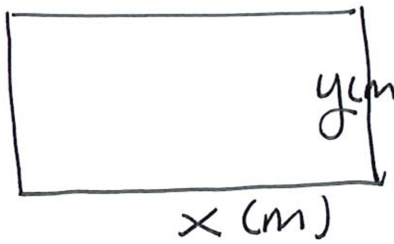
Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontaletan eta 2,7 €, berriz alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

OPTIMIZATU PREZIOA (MINIMOA)

4.B

Irudiko leihoa kontutan hartuta (beheko zatia laukizuzen bat eta goikoa erdi-zirkulu bat izanik) eta jakinda leihoaren perimetroak 6 m neurtzen duela , kalkulatu laukizuzenaren dimentsioak ahalik eta argi gehien sar dadin





DATUA Azalera $5m^2$

OPTIMIZATU: Prezioa (min)

$1,5$ €/m → horizontal

$2,7$ €/m bertikal

1) OPTIMIZATU Markoaren prezioa

$$P(x,y) = 2\cdot x\cdot 1,5 + 2y\cdot 2,7$$

$$P(x,y) = 3x + 5,4y.$$

2) Prezioa aldagai bakar batean jarri:

$$A = 5m^2 = 50000\ cm^2 \longrightarrow A = xy \longrightarrow 50000 = x\cdot y$$

$$\boxed{y = \frac{50000}{x}} \Rightarrow P(x) = 3x + 5,4\cdot\frac{50000}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = 3x + \frac{270000}{x}}$$ ← optimizatzeko funtzioa

3) Preziorik merkeena aurkitzeko, MINIMOA: $\left\{ \begin{array}{l} P'(x)=0 \\ P''(x)>0 \end{array}\right.$

$$P'(x) = 3 - \frac{270000}{x^2} \Rightarrow P'(x)=0 \Rightarrow 3-\frac{270000}{x^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 300}$$

4) x-ren balioak konprobatu:

$x=-300$ ezin da izan

$x=300$ minimoa den frogatzeko: $P''(x) = \frac{2\cdot 270000}{x^3}$; $P''(3)>0 \Rightarrow$ Minimoa da

5) EMAITZA

$$x = 300 \rightarrow y = \frac{50000}{300} = 166,67\ cm.$$

$\boxed{\text{Markoaren neurriak preziorik merkeena izateko dira } x = 3m \text{ eta } y = 1,67m}$

4.ARIKETA Aukeratu bi ariketatik bat

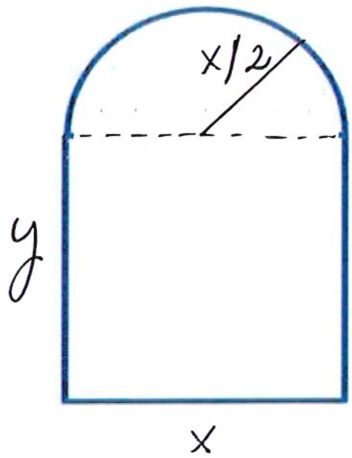
4.A (EBAU 2015 UZTAILA A3)

Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontaletan eta 2,7 €, berriz alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

4.B

Irudiko leihoa kontutan hartuta (beheko zatia laukizuzen bat eta goikoa erdi-zirkulu bat izanik) eta jakinda leihoaren perimetroak 6 m neurtzen duela , kalkulatu laukizuzenaren dimentsioak ahalik eta argi gehien sar dadin

AZALERA GEHIEN



⊙ Optimizatu behar dan funtzioa

$$A(x,y) = x\cdot y + \frac{\pi(x/2)^2}{2}$$

r — zirkulu erdia

$$\boxed{A(x,y) = xy + \frac{\pi x^2}{8}}$$

⊙ Erlazionatzeko x eta y, datua

PERIMETROA = 6 m.

$$\text{PERIMETROA} = x + 2y + \frac{\cancel{2}\pi\, x/2}{\cancel{2}} \quad r$$

$$6 = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$$

$$12 = 2x + 4y + \pi x \longrightarrow \boxed{y = \frac{12-2x-\pi x}{4}}$$

⊙ Azaleraren funtzioa aldagai bakarrean:

$$A(x) = x\cdot\frac{12-2x-\pi x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{12}{4}x - \frac{2x^2}{4} \underbrace{- \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8}}_{\pi x^2\underbrace{\left(-\frac{2}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{-1/8}} =$$

$$\boxed{A(x) = \left(\frac{-4-\pi}{8}\right)x^2 + 3x}$$

$$A'(x) = 0 \qquad A'(x) = \frac{2(-4-\pi)}{\cancel{8}\,4}x + 3 \qquad \frac{-4-\pi}{4}x = -3$$

$$x = \frac{12}{4+\pi} = \boxed{1{,}68\ m}$$

· Konprobatu:

$$A''(x) = -\frac{4+\pi}{4} < 0 \longrightarrow 1{,}68 \ \underline{\text{MAXIMOA DA}}$$

$$y = \frac{12 - 2\cdot 1{,}68 - \pi\cdot 1{,}68}{4} = 3{,}48\ m$$

EMAITZA

$x = 1{,}68\,m \quad y = 0{,}84\,m$

5.ARIKETA

Aukeratu bi ariketatik bat

5. A. Izan bedi $f(x) = x^3 - 2x + 5$

Kalkulatu f(x) funtzioaren inflexio puntuan daukan zuzen ukitzailearen ekuazioa eta bere zuzen perpendikularraren ekuazioa.

5.B. Honako kurba hau izanik $f(x) = \frac{1}{x-1}$ aurkitu zer puntuan izango duen $P(-3,2)$ puntutik ere igarotzen den zuzen ukitzailea

5A Kalkulatu behar da INFLEXIO PUNTUAK.

$\boxed{f''(x) = 0}$

$f(x) = x^3 - 2x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0$

$6x = 0$

$\boxed{x = 0}$

Jakiteko inflexio puntua dan $f''' \neq 0$ bete behar da

$f'''(x) = 6 \neq 0$ beraz $x = 0$ Inflexio puntua da.

- Puntua kalkulatzeko $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 + 5 = 5 \rightarrow P(0,5)$
- Kalkulatzeko $P(0,5)$ puntuan zuzen ukitzailea, behar da $m = f'(x_0)$ kalkulatu puntu honetan malda

$y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$m = f'(x_0) \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \rightarrow \boxed{m = -2}$

- Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$y = 5 - 2(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 5}$

- Zuzen ukitzailearekiko perpendikularra izateko $m_1 \cdot m_2 = -1$, beraz $m_1 = -1/-2 = 1/2$.
- Zuzen perpendikularra $y = 5 + \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$ PERPENDIK $\boxed{y = \frac{x}{2} + 5}$

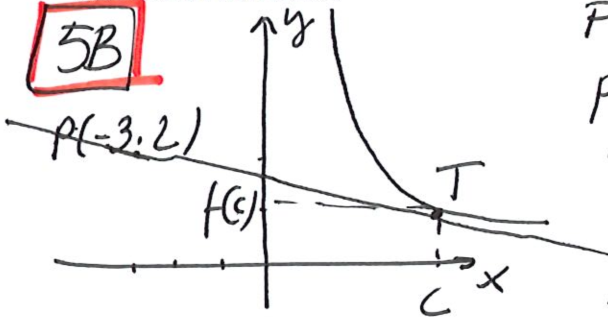
5.ARIKETA: **Aukeratu bi ariketatik bat**

5. A. Izan bedi $f(x) = x^3 - 2x + 5$

Kalkulatu f(x) funtzioaren inflexio puntuan daukan zuzen ukitzailearen ekuazioa eta bere zuzen perpendikularraren ekuazioa.

5.B. Honako kurba hau izanik $f(x) = \frac{1}{x-1}$ aurkitu zer puntuan izango duen $P(-3,2)$ puntutik ere igarotzen den zuzen ukitzailea

5B



P(-3,2) eta T ukitzaile puntutik pasatzen den zuzen ukitzailea kalkulatu behar da. $\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$

1) m kalkulatzeko

$P(-3,2)$, $T(c, f(c))$

$T\left(c, \frac{1}{c-1}\right)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{c-1} - 2}{c+3} = \frac{\frac{1-2(c-1)}{c-1}}{c+3} = \frac{-2c+3}{(c-1)(c+3)}$$

2) Deribatua T puntuan

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \left(-(x-1)^{-2}\right) = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(c) = \frac{-1}{(c-1)^2}$$

3) $m = f'(c) \Rightarrow \frac{-2c+3}{\cancel{(c-1)}(c+3)} = \frac{-1}{(c-1)^{\cancel{2}}}$

$$\frac{-2c+3}{c+3} = \frac{-1}{c-1} \Rightarrow (-2c+3)(c-1) = -(c+3)$$

$$-2c^2 + 2c + 3c - \cancel{3} = -c - \cancel{3}$$

$$-2c^2 + 6c = 0 \quad \boxed{\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 3 \end{matrix}}$$

4) Ukitze puntuak T eta m

$T_1 \rightarrow \boxed{c_1 = 0} \quad T_1\left(0, \frac{1}{0-1}\right) \rightarrow T_1(0,-1) \Rightarrow m_1 = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1$

$T_2 \rightarrow \boxed{c_2 = 3} \quad T_2\left(3, \frac{1}{3-1}\right) \rightarrow T_2(3, 1/2) \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{(3-1)^2} = \frac{-1}{4}$

5) Zuzen ukitzaileak

ZUZEN UKITZAILEAK

$T_1(0,-1)$ eta $m_1 = -1 \rightarrow y = -1 - 1(x-0) \Rightarrow \boxed{y_1 = -x - 1}$

$T_2(3, 1/2)$ eta $m_2 = -\frac{1}{4} \rightarrow y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{-x}{4} + \frac{5}{4}}$