7. El propietario de un edificio tiene alquilados los 40 pisos del mismo a un precio de 600 € cada uno. Por cada 60€ que el propietario aumenta el precio observa que pierde un inquilino. ¿a qué precio le convienen alquilar los pisos para obtener la mayor ganancia posible?(Ayuda: llamar x = nº de 60 € que aumenta o lo que es lo mismo el **nº inquilinos perdidos**.)

Sea x = nº de inquilinos perdidos.

Entonces:
Función Beneficio: $B(x) = (40 - x)\cdot(600 + 60x) = 24000 + 1800x - 60x^2$

Derivando: $B'(x) = 1800 - 120x$
Igualando a cero: $B'(x) = 0 \Rightarrow 1800 - 120x = 0 \Rightarrow x = 1800/120 = 15$, posible máximo ó mínimo.
Hallando la segunda derivada: $B''(x) = -120$
Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada:

$B''(15) = -120 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 15 \Rightarrow$
Precio que debe aumentar a cada piso: $60\cdot 15 = 900$ €

Solución: Le deberá aumentar 900 € el precio de cada piso.

8.- El consumo de un barco navegando a una velocidad de *x* nudos (millas/hora) viene dada por la expresión $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$. Calcular la velocidad más económica y el coste equivalente. **(PAU, JUN´2006)**

La función será el consumo: $C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$

Derivando: $C'(x) = \frac{2x}{60} - \frac{450}{x^2}$

Igualando a cero: $C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{60} - \frac{450}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{60} = \frac{450}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = 27000 \Rightarrow$

$x = \sqrt[3]{13500} = 23{,}81$, posible máximo ó mínimo.

Hallando la segunda derivada: $C''(x) = \frac{2}{60} - \frac{0 - 450\cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{60} + \frac{900}{x^3}$

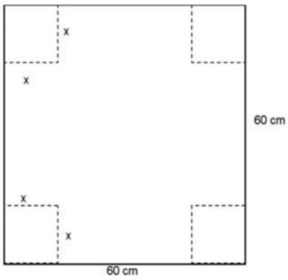
Sustituyamos el posible máximo ó mínimo en dicha derivada:

$C''(23{,}81) = \frac{2}{60} + \frac{900}{(23{,}81)^3} > 0$ **Mínimo**: $x = 23{,}81 \Rightarrow$

$C(23{,}81) = = \frac{(23{,}81)^2}{60} + \frac{450}{23{,}81} = 28{,}35$

Solución: Velocidad más económica es 23,81 nudos con un coste de 28,35.

9.- A partir de una cartulina cuadrada de 60 cms de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. de lado. Decidir si la observación es correcta o no. **(PAU, JUN´2001)**



Función: $f(x) = (60 - 2x)\cdot(60 - 2x)\cdot x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$
Derivando la función: $f'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$

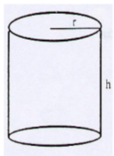
Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 40x + 300 = 0 \Rightarrow x = 10$ y $x = 30$ Posibles máx ó mín.

Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 24x - 480$
Sustituyamos los posible máximos ó mínimos en dicha derivada:

$f''(30) = 720 - 480 = 240 > 0 \Rightarrow$ Mínimo
$f''(10) = 240 - 480 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 10$

Solución: La observación es correcta.

10.- Se quiere construir depósitos cilíndricos como el de la figura, con la condición de que la altura más el perímetro de la circunferencia valgan 100 m. Comprobar que el volumen de los depósitos viene dado por la expresión $V = 100\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot\pi^2\cdot r^3$ y determinar las dimensiones del que tiene volumen máximo. **(PAU,Junio´97)**



<u>Relación:</u> $h + 2\cdot\pi\cdot r = 100 \Rightarrow h = 100 - 2\cdot\pi\cdot r$
<u>Función:</u> $V = \pi\cdot r^2\cdot h \Rightarrow V(r) = \pi\cdot r^2\cdot(100 - 2\cdot\pi\cdot r) = 100\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot\pi^2\cdot r^3$

Derivando: $V'(r) = 200\cdot\pi\cdot r - 6\cdot\pi^2\cdot r^2$
Igualando a cero: $V'(r) = 0 \Rightarrow r\cdot(200\cdot\pi - 6\cdot\pi^2\cdot r) = 0 \Rightarrow$ **r = 0** ó $200\cdot\pi - 6\cdot\pi^2\cdot r = 0$

$\Rightarrow r = 0$; $r = \dfrac{200\cdot\pi}{6\cdot\pi^2} = \dfrac{100}{3\cdot\pi} = 10{,}61$, posibles máximos ó mínimos.

Hallando la segunda derivada: $V''(r) = 200\cdot\pi - 12\cdot\pi^2\cdot r$

Sustituyamos los posibles máximos ó mínimos en dicha derivada:

$V''(0) = 200\cdot\pi - 0 > 0 \Rightarrow$ Mínimo

$V''(10{,}61) = 200\cdot\pi - 12\cdot\pi^2\cdot 10{,}61 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $r = 10{,}61 \Rightarrow$

$h = 100 - 2\cdot\pi\cdot 10{,}61 = 33{,}34$

Solución: El depósito cilíndrico de volumen máximo tendrá de radio: 10,61 m y de altura 33,34 m.

MATEMÁTICAS: 2º BACHILLERATO

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN: HOJA 6

1.- Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo.

x = 1er número; y = 2º número

Relación: x + y = 24 $\Rightarrow$ x = 24 – y

Función: f(x,y) = $x \cdot y^3$ $\Rightarrow$ f(y) = $(24-y) \cdot y^3 = 24y^3 - y^4$

Calculemos ahora la derivada de dicha función: f´(y) = $72y^2 - 4y^3$

Igualando a cero dicha derivada para calcular los posibles máximos o mínimos de la función: f´(y) = 0 $\Rightarrow$ $72y^2 - 4y^3$ = 0 $\Rightarrow$ y = 0 ó 72 – 4y = 0 $\Rightarrow$ y = 0; y = 18 posibles máximos ó mínimos de la función.

Hallando la 2ª derivada para saber si es un máx. ó mín.: f´´(y) = $144y - 12y^2$

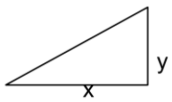
Sustituyamos los posibles máximos ó mínimos en dicha derivada:

f´´(0) = 0 duda $\Rightarrow$ f´´(y) = 144 – 24y $\Rightarrow$ f´´(0) = 144 ≠ 0 $\Rightarrow$ y = 0 es P.I. de f(x)

f´´(18) = 144·18 – 12·18^2 = - 1296 < 0 máximo : y = 18; x = 24 – 18 = 6

Solución: Los números pedidos son 6 y 18.

2. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitudes de sus dos catetos vale 4 cm.



x = 1er cateto (base); y = 2º cateto (altura)

Relación: x + y = 4 $\Rightarrow$ y = 4 – x

Función: f(x,y) = $\frac{x \cdot y}{2}$ $\Rightarrow$ f(x) = $\frac{x \cdot (4-x)}{2} = \frac{4x - x^2}{2}$

Calculemos ahora la derivada de dicha función: f´(x) = $\frac{4-2x}{2}$

Igualando a cero dicha derivada para calcular los posibles máximos o mínimos de la función: f´(x) = 0 $\Rightarrow$ $\frac{4-2x}{2}$ = 0 $\Rightarrow$ 4 – 2x = 0 $\Rightarrow$ x = 2 posible máximo ó mínimo de la función.

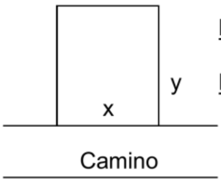
Hallando la 2ª derivada para saber si es un máx. ó mín.: f´´(x) = $\frac{-2}{2}$ = - 1

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada:

f´´(2) = - 1 < 0 máximo : x = 2; y = 4 – 2 = 2 $\Rightarrow$ A = $\frac{2 \cdot 2}{2}$ = 2 cm^2

Solución: El área máxima que puede tener el triángulo rectángulo es de 2 cm^2

3.- Si se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 Euros/m y la de los otros 10 Euro/m, halla el área del mayor campo que puede cercarse con 28800 Euros.



Relación: $90x + 20y = 28.800 \Rightarrow 9x+2y= 2880 \Rightarrow y = 1440 – 4´5x$

Función (área): $f(x,y) = x\cdot y \Rightarrow f(x) = x\cdot(1440 – 4´5x) = 1440x – 4´5x^2$

Derivando: $f´(x) = 1440 – 9x$

Igualando a cero: $f´(x)=0 \Rightarrow 1440 – 9x = 0 \Rightarrow x = 160$ posible máx. ó mín.

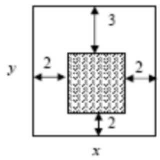
Hallando la segunda derivada: $f´´(x) = - 9$

Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f´´(160) = -9 < 0$ máximo.

Si $x = 160 \Rightarrow y = 1440 – 4´5\cdot160 = 720$

Solución: El área del mayor campo que se puede cercar con 28800 Euros es de 160 m. x 720 m. = 115.200 m^2.

4. Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm^2 de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 2 cm. y el superior mide 3 cm. Calcular las dimensiones de la página que permitan obtener la mayor área impresa posible.



Alto de la página impresa: y-5
Ancho de la página impresa: x-4
Área impresa = $(x\text{-}4)\cdot(y\text{-}5)$ (función objetivo)
Área páginas = $x\cdot y = 600$ (relación) $\Rightarrow y = \dfrac{600}{x}$

Función: $f(x, y) = (x-4)\cdot(y – 5) \Rightarrow f(x) = (x – 4)\cdot\left(\dfrac{600}{x} – 5\right) = 600 – 5x – \dfrac{2400}{x} + 20$

Derivando: $f´(x) = - 5 + \dfrac{2400}{x^2}$

Igualando a cero: $f´(x) = 0 \Rightarrow - 5 + \dfrac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2400}{x^2} = 5 \Rightarrow x^2 = \dfrac{2400}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{480} = \pm 21,91$

Como no pude ser – 21,91 ya que las longitudes no pueden ser negativas. El único punto posible máximo ó mínimo de f(x) es x= +21,91

Hallando la segunda derivada: $f´´(x) = \dfrac{0 – 2400\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{– 4800}{x^3}$

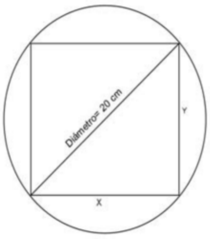
Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f´´(21,91) = (-) < 0$ máximo.

Si $x = 21,91 \Rightarrow y = \dfrac{600}{21,91} = 27,38$

Solución: La hoja debe tener de ancho 21,91 cm y 27,38 cm de alto..

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN: HOJA 6

5.- Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 10 cm, calcula las dimensiones del que tenga área máxima.



Relación: $x^2 + y^2 = 20^2 \Rightarrow y^2 = 400 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{400 - x^2}$

Función: $A(x, y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x \cdot \sqrt{400 - x^2} = \sqrt{400x^2 - x^4}$

Como la función es positiva se puede elevar al cuadrado sin que varíen sus máximos y/o mínimos:

$$f(x) = (A(x))^2 = x^2 \cdot (400 - x^2) = 400x^2 - x^4$$

Derivando: $f'(x) = 800x - 4x^3$

Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow 800x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (800 - 4x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \pm\sqrt{200}$ $\Rightarrow$ x = 14´14 (las longitudes no pueden ser negativas o cero) posible máx. ó mín.

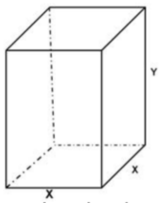
Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 800 - 12x^2$

Sustituyamos el posible máximo ó mínimo en dicha derivada:

$f''(14'14) = 800 - 12 \cdot (14{,}14)^2 = -1600 < 0 \Rightarrow$ Máximo: $x = 14'14 \Rightarrow$
$y = \sqrt{400 - (14'14)^2} = \sqrt{200} = 14'14$

Solución: Tendrá área máxima un cuadrado de lado 14´14 cm.

6.- Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible. **(PAU, SEPT´2001)**



Relación: $V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y = 13{,}5 \Rightarrow y = \frac{13{,}5}{x^2}$

Función: $f(x,y) = x^2 + 4 \cdot x \cdot y \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \left(\frac{13{,}5}{x^2}\right) = x^2 + \frac{54}{x}$

Derivando: $f'(x) = 2x + \left(\frac{0 - 54}{x^2}\right) = \frac{2x^3 - 54}{x^2}$

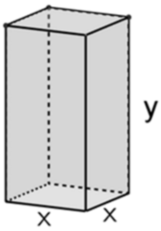
Igualando a cero: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$, posible máximo ó mínimo.

Hallando la segunda derivada: $f''(x) = 2 + \frac{54 \cdot 2x}{x^4} = 2 + \frac{108}{x^3}$

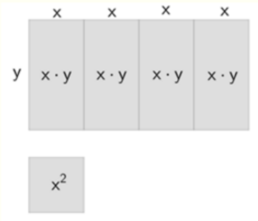
Sustituyamos el posible máx. ó mín. en dicha derivada: $f''(3) = 2 + \frac{108}{27} = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo: $x = 3 \Rightarrow y = \frac{13{,}5}{3^2} = 1{,}5$

Solución: Para que precise la menor cantidad de chapa, la base debe ser un cuadrado de lado 3 m y la altura 1,5 m.

25. Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.
Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.
(2012ko EKAINA-B)



Kaxaren garapena eta azalera osoa:



$Azalera = x^2 + 4xy$

Baldintza, bolumena 4000 cm^3:

$B_{kaxa} = oinaren\ azalera \cdot altuera$

$4000 = x^2 \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{4000}{x^2}$

Azalera funtzioan ordezkatu

Kaxaren azalera funtzioa:

$A(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{4.000}{x^2} \Rightarrow A(x) = x^2 + \frac{16.000}{x}$

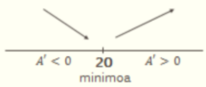
Deribatuaren erroen artean aurkituko dugu funtzioaren minimoa:

$$A'(x) = 2x + \frac{-16.000}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{-16.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{16.000}{x^2} \Longrightarrow 2x^3 = 16.000 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^3 = \frac{16.000}{2} \Longrightarrow x^3 = 8.000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8.000} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 20\ cm}$$

Egiazta dezagun $\boldsymbol{x = 20\ cm}$ funtzioaren minimoa dela:



Kaxen fabrikazioan ahalik eta kartoi gutxien erabiltzeko kaxaren neurriak:

$$\boldsymbol{x = 20\ cm}$$
$$\boldsymbol{y} = \frac{4.000}{20^2} = \boldsymbol{10\ cm}$$

27. Denda batean olioa saltzen da 2 eurotan litroa. x litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adierazita) hauek dira: $0{,}5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu C-ren balioa eta lortutako etekin maximoa:

(2012ko UZTAILA-B)

Olioa 2 €/l-an saltzen denez, x litro saldutakoan bildutako dirua: $2x$

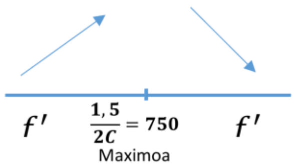
Gastuak: $0{,}5x + Cx^2$

Orduan, Etekinak = Sarrerak – gastuak → $\underbrace{f(x)}_{etekinak} = \underbrace{2x}_{sarrerak} - \left(\underbrace{0{,}5x + Cx^2}_{gastuak}\right)$

$$f(x) = 2x - 0{,}5x - Cx^2 = 1{,}5x - Cx^2.$$

$$f'(x) = 1{,}5 - 2Cx.$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow = 1{,}5 - 2Cx = 0 \rightarrow 1{,}5 = 2Cx \;\rightarrow \boxed{x = \tfrac{1{,}5}{2C}}$$



$$\tfrac{1{,}5}{2C} = 750 \;\rightarrow 1{,}5 = 750 \cdot 2C \;\rightarrow 1{,}5 = 1500C \;\rightarrow \boldsymbol{C} = \tfrac{\mathbf{1{,}5}}{\mathbf{1500}} = \mathbf{0{,}001}$$

Etekin maximoa:

$$f(x) = 1{,}5x - 0{,}001 \cdot x^2 \xrightarrow{x=750} f(x) = 1{,}5 \cdot 750 - 0{,}001 \cdot 750^2 = \mathbf{562{,}50}\ €$$

28. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-2x}$ funtzioa.

a) Aztertu funtzioaren gorapen- eta beherapen-tarteak.
b) Aztertu funtzioaren maximo eta minimoak eta egin haren grafikoaren eskema.

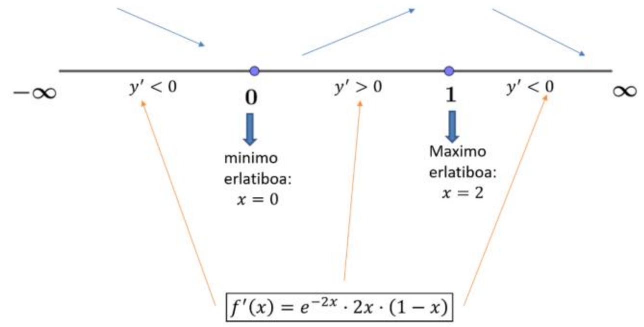
2011ko EKAINA-A

$$y = x^2e^{-2x}$$

$$y' = 2xe^{-2x} + x^2e^{-2x} \cdot (-2) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (2x - 2x^2) = e^{-2x} \cdot 2x \cdot (1 - x)$$

$$Puntu\ kritikoak: e^{-2x} \cdot 2x \cdot (1 - x) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \cancel{e^{-2x} = 0} \\ \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = 1} \end{array}$$



Laburtuz

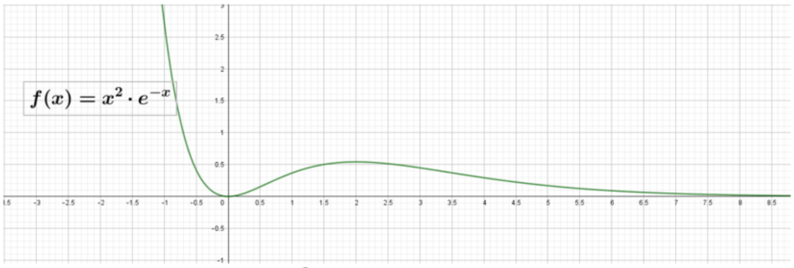
Gorapen tarteak: $(0,1)$

Beherapen tarteak: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Maximo erlatiboa: $\mathrm{x} = 1 \rightarrow f(1) = 1^2 \cdot e^{-1} = e^{-1} \rightarrow Max. M(2, e^{-1})$

minimo erlatiboa: $\mathrm{x} = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 \cdot e^{-2} = 0; minimoa: m(0,0)$

Adierazpen grafikoa:



$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0 \;\; (e^{\cdot 2x} \gg x^2 \text{ delako})$$

$$y = 0 \; Asintota\ horizontala\ x \to \infty\ doala$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-2x} = \infty^2 e^{-2\cdot(-\infty)} = \infty$$

30. Aztertu funtzio honen muturrak eta asintotak: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Egin grafikoaren eskema

(2017ko EKAINA-B)

(a) Definizio-eremua:

$x - 1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ *denean funtzioa ez dago definituta*

Beraz:

$$Definizio - Eremua \rightarrow \boldsymbol{D.E.}: \mathbb{R} - \{\boldsymbol{1}\}$$

(b,c) 1. Deribatuaren azterketa

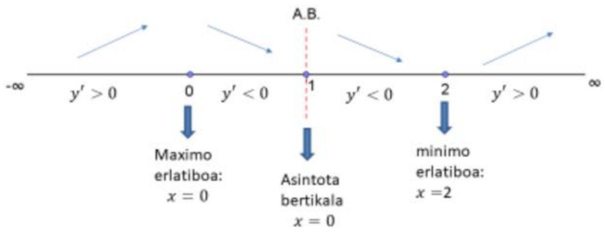
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Puntu kritikoak:

- $y' = 0 \rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = 2} \end{matrix}$
- *Funtzioa ez da deribagarria*: $x - 1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

Balio hauek zuzen errealean kokatuz, X ardatza hainbat tartetan banatzen dute. Tarte bakoitzean deribatuaren zeinua konstantea da (+ edo -).



$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y'(-1) = \frac{-1 \cdot (-1-2)}{(-1-1)^2} > \mathbf{0}$$

$$y'(0{,}5) = \frac{0{,}5 \cdot (0{,}5-2)}{(0{,}5-1)^2} < \mathbf{0}$$

$$y'(1{,}5) = \frac{1{,}5 \cdot (1{,}5-2)}{(1{,}5-1)^2} < \mathbf{0}$$

$$y'(3) = \frac{3 \cdot (3-2)}{(3-1)^2} > \mathbf{0}$$

Laburtuz

Gorapen tarteak: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Beherapen tarteak: $(0,1) \cup (1,2)$

Maximo erlatiboa: $\mathrm{x} = 0 \ \rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0\ ; Maximoa\!: M(0,0)$

miniimo erlatiboa: $\mathrm{x} = 2 \ \rightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4\ ; minimoa\!: m(2,4)$

34. Merkatari batek kafea saltzen du 2 € eta 75 zentimotan kiloa. Bi motatako gastuak ditu, merkantziaren garraioa eta herri-ogasunari ordaindu beharreko zerga bat. Saltzen duen kilo bakoitzeko, garraioaren gastua 25 zentimokoa da. Herri-ogasunari ordaindu beharreko euro kopurua kalkulatzeko, saldutako kilo kopuruaren karratua zati 1200 egin behar da. Aurreko datuekin kalkulatu merkatariak saldu behar duen kilo kopurua irabazia maximoa izateko, eta kalkulatu irabazi maximo hori.

(2010ko UZTAILA-A).

Kafea saltzen du: $2€\ eta\ 75\ zentimo = 2{,}75\ €$

Saldutako kafe kiloak: $x\ (kilo)$

Sarrerak: $2{,}75 \cdot x\ \ (€)$

Garraio gastuak: $0{,}25x\ (€)$

Herri-ogasunari ordaindu: $\frac{x^2}{1200}\ \ (€)$

Beraz, irabaziak ematen dituen funtzioa:

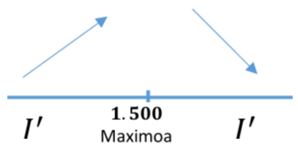
$$I = Sarrerak - Gastuak = 2{,}75 \cdot x - 0{,}25 \cdot x - \frac{x^2}{1200}$$

$$I(x) = 2{,}50 \cdot x - \frac{x^2}{1200} = 2{,}50 \cdot x - \frac{1}{1200} \cdot x^2$$

Funtzioaren deribatuaren erroen artean, maximoa aurkituko dugu:

$$I'(x) = 2{,}50 - \frac{2}{1200} \cdot x = 2{,}50 - \frac{1}{600} \cdot x$$

$$I'(x) = 0 \ \rightarrow\ 2{,}50 - \frac{1}{600} \cdot x = 0 \ \rightarrow\ 2{,}50 = \frac{1}{600} \cdot x \ \rightarrow x = 1.500\ kg$$



Irabaziak maximoak izan daitezen 1.500 kg kafe saldu behar ditu. Orduan, irabazi maximoak:

$$I(x) = 2{,}50 \cdot x - \frac{x^2}{1200} \rightarrow I(1.500) = 2{,}50 \cdot 1.500 - \frac{1.500^2}{1200} = \mathbf{1.875}\ €$$

19. Badakigu A eta B zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura, A·B; maximoa izan dadin.

(2014ko UZTAILA-B)

Bitez x eta y bi zenbaki positibo.

Zera egiaztatzen da, $x^2+y^2=32 \rightarrow y^2=32-x^2$

$y=+\sqrt{32-x^2}$

Bi zenbakien arteko biderkadura $x \cdot y$ maximoa izateko x eta y nahi ditugu kalkulatu.

$B = x \cdot y$ (biderkadura funtzioa maximizatzen duten balioak aurkitzea nahi dugu)

$B = x \cdot \sqrt{32-x^2}$ ($y=\sqrt{32-x^2}$ delako)

$B=\sqrt{x^2(32-x^2)}=\sqrt{32x^2-x^4}=(32x^2-x^4)^{1/2}$

B(x) funtzioa deribatuko dugu eta B'(x) ikurrak aztertu ondoren maximoak aurkituko ditugu:

$B'(x)=\frac{1}{2}(32x^2-x^4)^{-1/2}\cdot(64x-4x^3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{64x-4x^3}{\sqrt{32x^2-x^4}}$

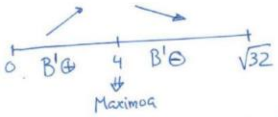
$B'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{64x-4x^3}{\sqrt{32x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 64x-4x^3=0$

$4x(16-x^2)=0 \rightarrow$ $\cancel{x=0}$ (ez da deribagarria) — a da positiboa

$\rightarrow 16-x^2=0$

$16=x^2$

$x=4$ eta $\cancel{x=-4}$



Biderkadura maximoa da $\boxed{x=4}$ eta $\boxed{y=\sqrt{32-16}=4}$ direnean.

20. f funtzioa ekuazio honek definitzen du: $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ Kalkula itzazu, arrazoituz:

a) *f(x)* funtzioaren definizio eremua.
b) *f(x)* funtzioaren goratze- beheratze-tarteak.
c) Egin ezazu funtzio horren grafikoaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2013ko EKAINA-A)

a

• $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ funtzio arrazionala ez dago definitute x^2-5x+6 izendatzailea zero egiten duten balio etarako:

$$x^2-5x+6=0 \;\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Hortaz, Dom $f(x)$: $x \in \mathbb{R} - \{2,3\}$

•Asintota bertikalak:

$$x^2-5x+6=0 \;\begin{cases} \boxed{x=2} \\ \boxed{x=3} \end{cases}$$

Egiaztatu dezagun $x=2$ eta $x=3$ asintota bertikalak direla albo-limiteak kalkulatuz:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2}{\underbrace{x^2-5x+6}_{=(x-2)(x-3)}} = \boxed{\frac{2}{0}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^-\cdot(-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^+\cdot(-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \boxed{\frac{2}{0}} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{1\cdot 0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{1\cdot 0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Beraz, $x=2$ eta $x=3$ funtzioaren asintota bertikalak.

• Asintota horizontala:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2}{(-\infty)^2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\rightarrow \boxed{Y=0}$ Asintota Horizontala.
↳ (X ardatza)

↑ (gainetik hurbiltzen da)

b Gorakze- eta beherakze-tarteak, funtzioaren funtzio deribatuaren zeinuak emango ditu (beti ere deribagarria den puntuetan).

$$\boxed{f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-5x+6)-2\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}=\frac{-2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}}$$

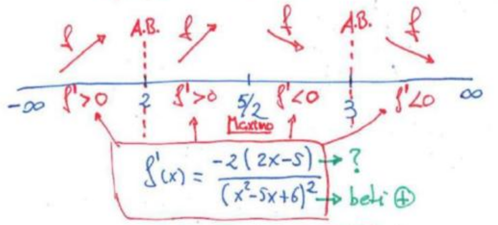
- $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}=0 \Rightarrow -2(2x-5)=0$

  $2x-5=0$

  $\boxed{x=5/2}$

- Izendatzailearen erroak:

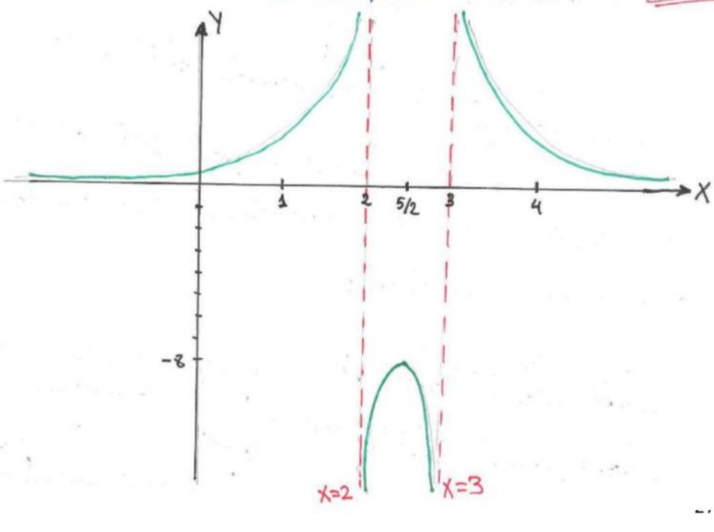
  $\boxed{x=2}$ eta $\boxed{x=3}$ (asintota bertikalak)



Gorakze-tarteak: $\boxed{x\in(-\infty,2)\cup(2,5/2)}$ Beherakze-tarteak: $\boxed{x\in(\frac{5}{2},3)\cup(3,\infty)}$

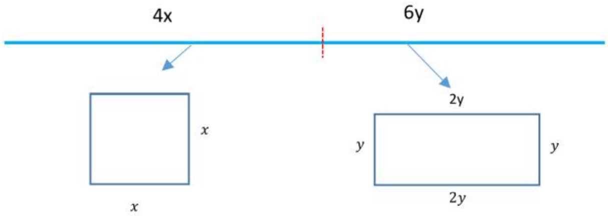
Maximo erlatiboa: $x=5/2$ abzisa puntuan $\rightarrow M(5/2, f(5/2))=M(\frac{5}{2},-8)$

c



21. 200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat. Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azaleren baturak minimoa izan behar du.

(2013ko EKAINA-B)

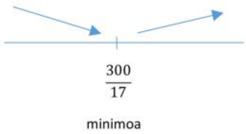


$Baldintza: \ 4x + 6y = 200 \rightarrow 2x + 3y = 100 \ \rightarrow x = \frac{100-3y}{2}$

$Azalera = x^2 + 2y^2 \rightarrow A = \left(\frac{100-3y}{2}\right)^2 + 2y^2$

$A' = 2\left(\frac{100-3y}{2}\right) \cdot \frac{-3}{2} + 4y = -3 \cdot \left(\frac{100-3y}{2}\right) + 4y = \frac{-300+9y+8y}{2} = \frac{17y-300}{2}$

$A' = 0 \rightarrow \frac{17y-300}{2} = 0 \rightarrow 17y - 300 = 0 \rightarrow y = \frac{300}{17}$



$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{300}}{\mathbf{17}} \ denean, \qquad \boldsymbol{x} = \frac{100 - 3\left(\frac{300}{17}\right)}{2} = \frac{\frac{1700-900}{17}}{2} = \frac{\mathbf{400}}{\mathbf{17}}$$

Beraz, zatien luzerak: $\boldsymbol{4x} = 4 \cdot \frac{400}{17} = \frac{\mathbf{1600}}{\mathbf{17}}\boldsymbol{cm} \ \ eta \ \ \boldsymbol{6y} = 6 \cdot \frac{300}{17} = \frac{\mathbf{1800}}{\mathbf{17}} \ \boldsymbol{cm}$

22. Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurotan adierazita) irekia duen n denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera: $B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.
b) Irabazi maximo horien balioa.

(2013ko UZTAILA-A)

Deribatua zein puntutan den 0 bilatuko ditugu:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96.$$

Deribatuaren balioa zero izatea dakarten puntuak hauek dira: $n = 1$ eta $n = 4$. Maximoa zein den jakiteko, bigarren deribatua erabiliko dugu:

$$B''(n) = -48n + 120.$$

n = 1 denean, minimo bat dago, eta n = 4 denean, maximo bat dago. Asteko irabaziak 64.000 euro izango dira.

23. $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa emanda:

a) Kalkula itzazu *A, B* eta *C* parametroen balioak, funtzioak $x=0$ abszisa-puntuan mutur bat izan dezan eta $x=2$ puntuan beste mutur bat. Balio bakarrekoak dira parametro horiek?

b) Zehaztu ezazu zer mutur mota den (maximoa edo minimoa).

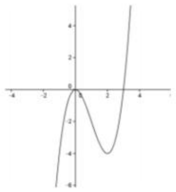
c) Irudika ezazu funtzioa ¨$C=0$ kasuan

(2013ko UZTAILA-B)

a) Funtzioaren deribatua $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ da.
Mutur bat du $x = 0$ denean; beraz, $B = 0$ betetzen da.
Mutur bat du $x = 2$ denean; beraz, $A = -3$ betetzen da.
A-ren eta *B*-ren balioak finkatuta gelditu dira, baina *C*-k edozein balio erreal har dezake.
Beraz, hau da funtzioa: $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

b) *f*-ren bigarren deribatua hau da: $f'' = 6x - 6$.
x = 0 denean, balio maximo bat du, eta x = 2 denean, berriz, minimo bat.

c) Hau da $f(x) = x^3 - 3x^2$ funtzioaren grafikoa:



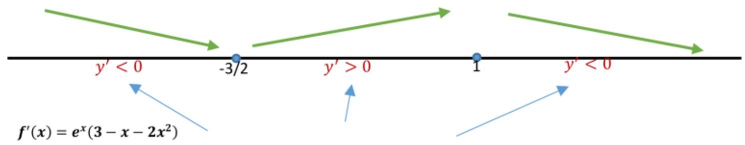
13. Izan bedi funtzio hau: $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$
    a) Kalkulatu f funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.
    b) Kalkulatu f-ren mutur erlatiboak (maximo eta minimoak).

(2015ko EKAINA-B)

$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x \rightarrow f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x \rightarrow$
$\rightarrow f'(x) = e^x(3 - 4x + 3x - 2x^2) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f'(x) = e^x(3 - x - 2x^2)}}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(3 - x - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{e^x = 0} \\ 3 - x - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$



Goratze-tarteak: $\boldsymbol{x} \in \left(-\frac{3}{2}, \mathbf{1}\right)$

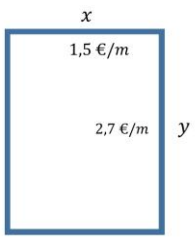
Beheratze-tarteak: $\boldsymbol{x} \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (\mathbf{1}, \infty)$

Maximo erlatiboak: $x = 1, \rightarrow f(1) = \left(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2\right)e^1 = e \rightarrow \boldsymbol{M(1, e)}$

Minimo erlatiboak: $x = -\frac{3}{2}, \rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)e^{-\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}} \rightarrow$
$\rightarrow \boldsymbol{m\left(-\frac{3}{2}, -9e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

14. Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontala eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

(2015ko UZTAILA-A)



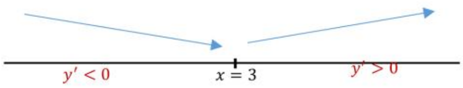
$$Azalera = 5 \rightarrow x \cdot y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{x}$$

$$Kosto\ funtzioa\colon\ F = 1{,}5 \cdot 2x + 2{,}7 \cdot 2y = 3x + 2{,}7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{x} \rightarrow$$
$$F = 3x + \frac{27}{x}$$

Beharrezko baldintza muturra izateko:

$$F' = 3 + \frac{-27}{x^2} \rightarrow F' = 0 \rightarrow 3 - \frac{27}{x^2} = 0 \rightarrow 3 = \frac{27}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{27}{3} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Egiaztatuko dugu, $x = 3$ denean F kostu-funtzioak minimoa hartzen duela:



Kostua minimoa da, markoaren dimentsioak: $x = 3$ eta $y = \frac{5}{3}$

15. Funtzio hau emanda:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & baldin\ x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & baldin\ x > 2 \end{cases}$$

a) Aurkitu a eta b-ren balioak, jakinik f zuzen erreal osoan deribagarria dela.
b) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x=1 abszisa puntuan.

(2015ko UZTAILA-B)

(a)

Jarraitasuna x=2 abszisa-puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a - 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} Jarraia\ izan\ dadin\ x = 2\ abszisa - puntuan: \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \\ 4a + 6 = -2b \to 4a + 2b = -6 \to \boxed{2a + b = -3} \end{array}$$

Deribagarritasuna x=2 abszisa-puntuan:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & baldin\ x < 2 \\ 2x - b & baldin\ x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right] \begin{array}{c} Derigarria\ izateko, albo - deribatuak\ berdinak: \\ 4a + 3 = 4 - b \to \boxed{4a + b = 1} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \to \boldsymbol{a = 2}\ \ eta\ \ \boldsymbol{b = -7}\ funtzioa\ deribagarria\ izan\ dadin.$$

(b)

$x = 1$ funtzioan ordezkatuz, puntuaren y ordenatua kalkulatuko dugu:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & baldin\ x \leq 2 \\ x^2 + 7x - 4 & baldin\ x > 2 \end{cases}$$

$$x = 1 < 2\ denez, bigarren\ funtzioan\ ordezkatuko\ dugu: f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$$

$P(1,5)$

Zuzen ukitzailearen malda lortzen da puntuaren abszisa deribatuan ordezkatuz:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 3 & baldin\ x \leq 2 \\ 2x + 7 & baldin\ x > 2 \end{cases} \to \boldsymbol{m} = f'(1) = 4 \cdot 1 + 3 = \boldsymbol{7}$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$\left.\begin{array}{l} P(1,5) \\ m = 7 \end{array}\right\} \to y = y_0 + m(x - x_0) \to y = 5 + 7 \cdot (x - 1) \to \boxed{\boldsymbol{y = 7x - 2}}$$

16. Har dezagun funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + c$

c) Lor itzazu a-ren, b-ren eta c-ren balioak, funtzioa koordenatu jatorritik pasa dadin eta (1,-1) puntuan minimo bat izan dezan.

d) Hala lortutako funtzioak ba al du beste maximorik edo minimorik?

(2014ko EKAINA-A)

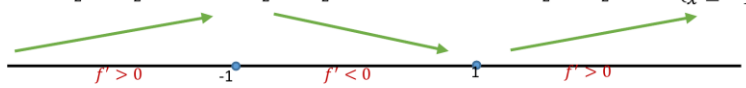
a) $f(x) = ax^3 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 + b$

Emandako informazioaren arabera,

- Koordenatu jatorritik pasatzen da; hau da, (0,0) puntutik:
  $$f(0) = 0 \rightarrow \boldsymbol{c = 0}$$
- (1,-1) funtzioaren puntu bat da:
  $$f(1) = -1 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c = -1 \rightarrow \boldsymbol{a + b + c = -1}$$
- (1,-1) puntuan minimo bat izateko beharrezko baldintza:
  $$f'(x_0) = 0 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 0 \rightarrow \boldsymbol{3a + b = 0}$$

Beraz; $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{c = 0} \\ \boldsymbol{a + b + c = -1} \\ \boldsymbol{3a + b = 0} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \;\; \boxed{b = -\frac{3}{2}} \;\; \boxed{c = 0} \;\rightarrow\; f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \xrightarrow[\text{muturra}]{\substack{\text{beharrezko} \\ \text{baldintza}}} f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$



Beste maximo bat du $x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1) = 1 \rightarrow M(-1,1)$ abszisa-puntuan.

17. Badakigu F funtzioa puntu guztietan deribagarria dela, $(-\infty, 0]$ tartean $F(x) = 1 + 2x + Ax^2$ formulak definitzen duela eta $(0, \infty)$ tartean, berriz, formula honek: $F(x) = B + Ax$

a) Aurkitu ezazu zer balio izan behar duten A-k eta B-k aurreko baldintzak bete daitezen.

b) Irudika ezazu F.

(2014ko EKAINA-A)

a) Fen funtzioa zatika definitoriko funtzioa da:

$$F(x) = \begin{cases} Ax^2+2x+1 & x \in (-\infty, 0] \\ Ax+B & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Funtzioa deribagarria denez puntu guztietan, jarraia ere izango da.
Jarraitasunaren baldintzak $x=0$ abszisa-puntuan aplikatuz:

$$\lim_{x \to 0^-} (Ax^2+2x+1) = 1$$
$$\lim_{x \to 0^+} (Ax+B) = B$$
$$f(0) = A \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

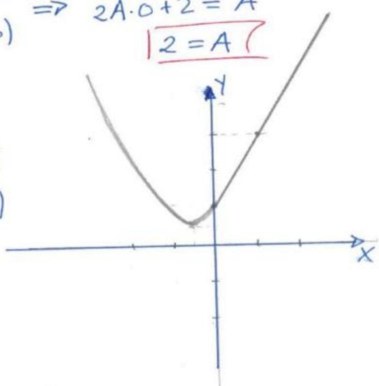
F(x) jarraia izan dadin $x=0$ abszisa-puntuan: $\boxed{1 = B}$

Bestetik, deribagarria izan dadin, albo-deribatuak $x=0$ puntuan berdinak izan behar dira:

$$F'(x) = \begin{cases} 2Ax+2 & x \in (-\infty, 0] \\ A & x \in (0, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(0^-) = F'(0^+) \\ 2A \cdot 0 + 2 = A \\ \boxed{2 = A} \end{array}$$

Beraz, $\boxed{A = 2 \text{ eta } B = 1}$

b) $$F(x) = \begin{cases} 2x^2+2x+1 & x \in (-\infty, 0] \\ 2x+1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$



18. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funtzioa emanda, azter itzazu haren goratze- eta beheratza-tarteak eta maximo eta minimoak.
Egin itzazu f-ren gutxi gorabeherako grafiko bat, eta erantzun iezaiozu, arrazoituz, galdera honi: x-ren zenbat baliok betetzen dute f(x)=0 izatea?
(2014ko UZTAILA-A)

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Funtzio deribatuaren ikurren azterketa egingo dugu. Gogoratu funtzio deribagarri baten deribatua positiboa bada; orduan, funtzioa gorakorra dela eta negatiboa denean beherakorra. Gorakorra izatetik beherakorra izatera igarotzen den puntuan maximo erlatiboa eta beherakorra izatetik gorakorra izatera minimo erlatiboa.

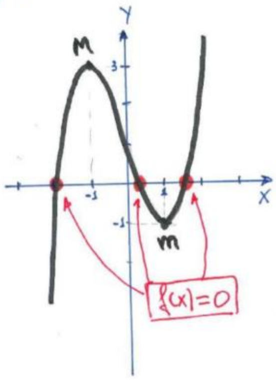
$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$-\infty$ — $f'>0$ (f ↗) — -1 — $f'<0$ (f ↘) — 1 — $f'>0$ (f ↗) — $+\infty$

$-1 \Downarrow$ Maximo erlatiboa
$1 \Downarrow$ minimo erlatiboa

Gorakorra: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Beherakorra: $x \in (-1, 1)$
Maximo erlatiboa: $M(-1, 3)$
minimo erlatiboa: $m(1, -1)$

b) Irudikapen grafikoa:



Funtzio deribatuak emandako informazioa erabiliz ondoko adierazpen grafikoa lortu dugu. Ikus daitekenez, funtzioaren grafikak hiru puntuetan mozten du X ardatza; beraz, f(x)=0 egiaztatzen duten hiru balio daude.

6. Badakigu $y = 2x - 10$ zuzena $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1, -8)$ puntuan.

a. Kalkulatu A-ren eta B-ren balioak.
b. Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y = -15x - 1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebaki-puntuak.

(2017ko UZTAILA-A)

(a)

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Azter dezagun emandako informazioa banan-banan:

- Funtzioaren grafika (1,-8) puntutik igarotzen da; beraz:

$$f(1) = -8 \;\Rightarrow\; 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 - 1 = -8 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A + B = -8}}$$

- (1,-8) puntuko zuzen ukitzailea $y = 2x - 10$ da; beraz, malda=2. Orduan, deribatuaren balioa x=1 denean 2 da :

$$f'(1) = 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B = 2 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{2A + B = -1}}$$

Ondorioz,

$$\left.\begin{array}{r} A + B = -8 \\ 2A + B = -1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} A = 7 \\ B = -15 \end{array} \quad\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1}}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{r} y = -15x - 1 \\ y = x^3 + 7x^2 - 15x - 1 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1 \rightarrow$$

$$x^3 + 7x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2(x + 7) = 0 \;\rightarrow\; \begin{array}{c} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = -7} \end{array}$$

7. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

a. Arrazoitu ea funtzioak maximo edo minimorik dituen ala ez. Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.
b. Zer tartetan da gorakorra funtzioa?
c. Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

(2017ko UZTAILA-A)

(a-b)

Funtzioaren lehenengo deribatuaren zeinuak gorapen eta beherapen tarteak emango dizkigu eta baita mutur erlatiboei (maximo-minimo) buruzko informazioa ere:

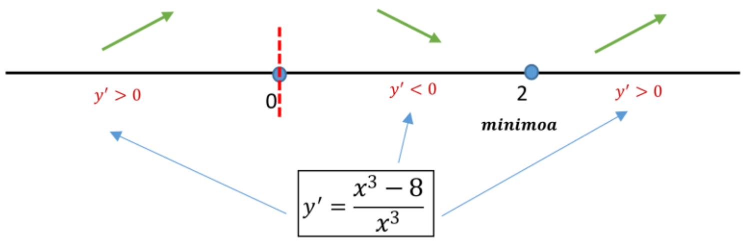
$$y = \frac{x^3+4}{x^2} \to y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{(x^2)^2} \to y' = \frac{3x^4-2x^4-8x}{x^4} \to y' = \frac{x^4-8x}{x^4} \to y' = \frac{x(x^3-8)}{x^4}$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{x^3-8}{x^3}}$$

Funtzio honen hazkundea alda daiteke deribatuaren erroetan edota asintota bertikaletara hurbiltzean:

- $y' = 0 \to \frac{\boldsymbol{x^3-8}}{\boldsymbol{x^3}} = 0 \to x^3 - 8 = 0 \to \boldsymbol{x = 2}$
- $\boldsymbol{x = 0}$ *asintota bertikalak*

Hiru balio hauek hiru tartetan banatzen dute zuzen erreala. Tarte bakoitzean y' deribatuaren ikurrak funtzioa gorakorra (y' +) ala beherakorra (y' −) den esango digu:



Laburtuz:

Goratze-tarteak:	$x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Beheratze-tarteak:	$x \in (0,2)$
Maximo erlatiboak:	ez du maximorik.
Minimo erlatiboak:	$x = 2 \to y = \frac{2^3+4}{2^2} = \frac{12}{4} = 3 \to min. (2,3)\ puntuan$

(c)

Asintota horizontala

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1}=\ \infty\ (ez\ dauka\ asintota\ horiz.)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1}=-\infty\ (ez\ dauka\ asintota\ horiz.)$$

Asintota bertikala

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{4}{0}\to(\infty)\to\begin{matrix}\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty\end{matrix}\to\boxed{\boldsymbol{x=0}}\,asint.\,bertikala$$

Asintota zeiharra

Zatiketa egin ondoren, zatidura asintota zeiharra da

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2 \\ \hline -x^3 & x \\ \hline 4 & \end{array} \to \boxed{\boldsymbol{y=x}}\ \boldsymbol{asintota\ zeiharra}$$

Nola hurbiltzen da funtzioa asintota zeiharrera?

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{x^3+4}{x^2} \\ y=x\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\xrightarrow{x=100} y_{Funtz.}=\frac{100^3+4}{100^2}=100{,}0004 \\ y_{asint.}=100 \\ \xrightarrow{x=-100} y_{Funtz.}=\frac{(-100)^3+4}{(-100)^2}=-99{,}9996 \\ y_{asint.}=-100\end{matrix}$$

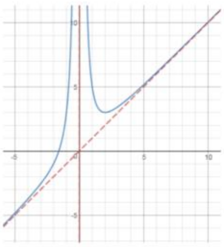
$x\to\infty\ doala$: $y_{Funtz.}>y_{asint.}$

Funtzioa asintotaren gainetik

$x\to-\infty\ doala$: $y_{Funtz.}>y_{asint.}$

Funtzioa asintotaren gainetik

Adierazpen grafikoa:



8. Azter ezazu funtzio honen goratze- eta beheratze-tarteak: $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ Eta kalkula itzazu haren maximoak eta minimoak. (2016ko EKAINA-A)

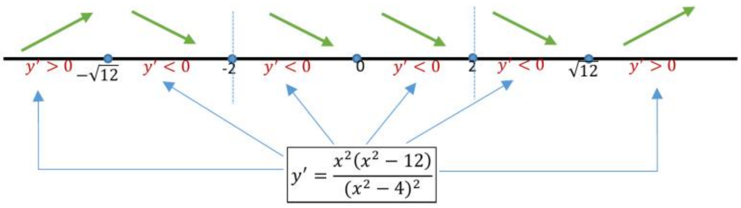
Lehenengo deribatuaren ikurren azterketa:

$$y = \frac{x^3}{x^2-4} \to y' = \frac{3x^2\cdot(x^2-4) - x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} \to y' = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} \to y' = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

Jakina denez, funtzio baten zeinua alda daiteke funtzioaren erroetan edota ez-jarraitasun puntuetan. Deribatuaren erroak eta ez-jarraitasun puntuak (izendatzailearen zeroak):

- $y' = 0 \to \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = 0 \to x^4 - 12x^2 = 0 \to x^2(x^2-12) = 0 \to \begin{cases} x^2 = 0 \to \boxed{x=0} \\ x^2 - 12 = 0 \to \begin{cases} \boxed{x=\sqrt{12}} \\ \boxed{x=-\sqrt{12}} \end{cases} \end{cases}$
- $Izendatzailea = 0 \to (x^2-4)^2 = 0 \to x^2 - 4 = 0 \to x^2 = 4 \to \begin{cases} \boxed{x=2} \\ \boxed{x=-2} \end{cases}$

Balio hauek zuzen errealean kokatu eta gero, tarte bakoitzean y' deribatuak hartzen duen ikurra aztertuko da tarteko edozein balio deribatuan ordezkatuz:



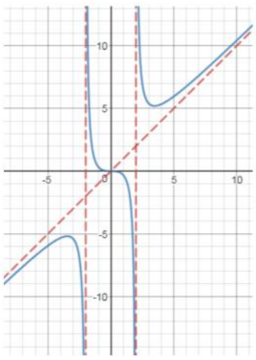
Goratze-tarteak: $x \in (-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, \infty)$

Beheratze-tarteak: $x \in (-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

Maximo erlatiboak: $x = -\sqrt{12} \to y = \frac{(-\sqrt{12})^3}{(-\sqrt{12})^2 - 4} = \frac{-12\sqrt{12}}{8} = \frac{-3\sqrt{12}}{2} \to M\left(-\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$

Minimo erlatiboak: $x = \sqrt{12} \to y = \frac{(\sqrt{12})^3}{(\sqrt{12})^2 - 4} = \frac{12\sqrt{12}}{8} = \frac{3\sqrt{12}}{2} \to m\left(\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$

Adierazpen grafikoa:



9. Funtzio hau emanda: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$
   a) Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak, funtzioak propietate hauek bete ditzan:
      - (0,0) puntutik pasatzea.
      - Maximo lokal bat izatea (1,2) puntua.
   b) Kalkula itzazu x aldagaiaren balio guztiak zeinetan funtzioaren grafikoak ukitzaile horizontala baitu. (2016ko EKAINA-B)

a) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C \to f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$

Emandako datuen arabera:

- $(0,0) puntutik\ igaro \to f(0) = 0 \to A \cdot 0^3 + B \cdot 0^2 + C = 0 \to \boxed{\boldsymbol{C = 0}}$
- $(1,2) puntutik\ igaro \to f(1) = 2 \to A \cdot 1^3 + B \cdot 1^2 + C = 2 \to \boxed{A + B = 2}$
- $(1,2) puntuan\ Max. \to f'(1) = 0 \to 3A \cdot 1^2 + 2B \cdot 1 = 0 \to \boxed{3A + 2B = 0}$

Ekuazio-sistema ebatziz,

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \boxed{\boldsymbol{A = -4}} \\ \boxed{\boldsymbol{B = 6}} \end{array}$$

Beraz, funtzioa honako hau da: $f(x) = -4x^3 + 6x^2$

b) Ukitzailea horizontala bada, malda nulua izango da.

$$m = 0 \to Hau\ da, f'(x) = 0 \to -12x^2 + 12x = 0 \to 12x(-x+1) = 0 \to \begin{cases} 12x = 0 \to \boxed{x = 0} \\ -x + 1 = 0 \to \boxed{x = 1} \end{cases}$$

$$Hau\ da, (0,0)\ eta\ (1,2)\ puntuetan\ zuzen\ ukitzailearen\ malda\ m = 0\ da.$$

10. Kalkula itzazu A, B, C eta D balioak funtzio honek: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ mutur erlatiboak izan ditzan (0,0) eta (2,2) puntuetan. (2016ko UZTAILA-A)

Funtzioa deribatuz: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \to f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

- $f(0) = 0 \to A \cdot 0^3 + B \cdot 0^2 + C \cdot 0 + D = 0 \to \boldsymbol{D = 0}$
- $f'(0) = 0 \to 3A \cdot 0^2 + 2B \cdot 0 + C = 0 \to \boldsymbol{C = 0}$
- $f(2) = 2 \to A \cdot 2^3 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 + D = 2 \to \boldsymbol{8A + 4B = 2}$
- $f'(2) = 0 \to 3A \cdot 2^2 + 2B \cdot 2 + C = 0 \to \boldsymbol{12A + 4B = 0}$

Hortik, $\boldsymbol{A = -\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{B = \frac{3}{2}}$; $\boldsymbol{C = 0}$; $\boldsymbol{D = 0}$

11. Funtzio polinomiko hau emanda: $p(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$

a) Kalkula itzazu p(x)-ren goratze- eta beheratze-tarteak.
b) Aurkitu haren maximoak eta minimoak.
c) Ba al da x-ren balioren bat $p(x) < 0$ izatea dakarrena? Arrazoitu zergatia.

(2016ko UZTAILA-B)

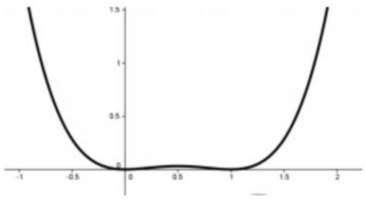
Problema ebazteko, $P(x)$ funtzioa deribatuko dugu, eta hau lortuko:

$P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Zerora berdinduz, hiru balio lortuko ditugu. x = 0, x = 0,5 eta x = 1. Beraz, $P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = 2x(x-0.5)(x-1)$.

a) Hauek izango dira tarteak:
- Goratzea: $\left(0,0,5\right)\bigcup\left(1,+\infty\right)$
- Beheratzea: $\left(-\infty,0\right)\bigcup\left(0,5,1\right)$

b) Erraz frogatzen da x = 0 eta x = 1 balioetan funtzioak minimo bat duela, eta x = 0,5 balioan funtzioak maximo bat duela.

c) Minimoak x = 0 eta x = 1 puntuetan lortzen direnez eta bietan balioak $P(0) = P(1)$ = 0 direnez, funtzioa zero edo handiagoa izango da x-ren edozein baliotarako. Beraz, ez dago x-ren baliorik $P(x) < 0$ betetzen duenik



12. Polinomio hau emanda: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
   a) Zehaztu a, b eta c koefizienteak, jakinik $x = -1$ eta $x = 1$ balioetan mutur erlatiboak dituela eta gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen dela.
   b) Aztertu bi mutur erlatibo horien izaera (maximoak ala minimoak diren) eta egin polinomioaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2015ko EKAINA-A)

a) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$x = -1$ mutur erlatiboa denez, $P'(-1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0$

$x = 1$ mutur erlatiboa denez, $P'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$

Bi ekuazio horiek ebatzita, hau lortuko dugu: $a = 0$ eta $b = -3$. Eta, horretaz gainera, funtzio polinomikoa koordenatu-jatorritik pasatzen denez: $P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

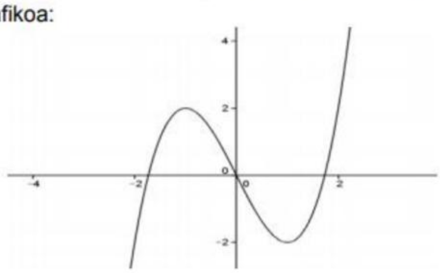
Beraz, hau da bilatutako polinomioa: $P(x) = x^3 - 3x$.

b) Badakigu muturren izaera (maximoa edo minimoa) bigarren deribatuaren zeinuaren araberakoa dela: $P''(x) = 6x$.

$P''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow x = -1$ balioan, funtzioak maximo erlatibo bat du.

$P''(1) = 6 > 0 \Rightarrow x = 1$ balioan, funtzioak minimo erlatibo bat du.

Hau da $P(x)$-ren grafikoa:



Ebazpenak:

1. $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$ funtzioa emanik:

a. Kalkulatu f-ren asintotak.
b. Adierazi zer tartetan den gorakorra eta zer tartetan beherakorra.
c. Muturrik al du f funtzioak? Horrela balitz, zein puntutan?

(2018ko EKAINA-B)

(a)

- Asintota horizontala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \ \ (konstantea); orduan, \boxed{\boldsymbol{y=k}}$$

funtzioaren asintota horizontala da.

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{y=1}}$$

Asintota horizontala

- Asintota bertikala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ ; orduan, \qquad \boxed{\boldsymbol{x=a}}$$

funtzioaren asintota bertitala da.

Funtzio arrazionaletan, asintota bertikalik izatekotan, izendatzailearen erroren bat izango da:

$$x^2-4=0 \to \begin{Bmatrix} x=2 \\ x=-2 \end{Bmatrix} \to Asintota\ bertikal\ posibleak$$

Egiazta dezagun ea asintota bertikalak diren,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \boxed{\frac{1}{0}} \to (\pm\infty) \to \begin{matrix} \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{matrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=2}\ A.B.}$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \boxed{\frac{1}{0}} \to (\pm\infty) \to \begin{matrix} \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{matrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=-2}\ A.B.}$$

(b-c)

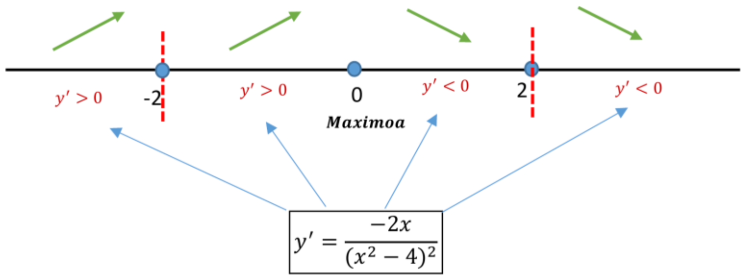
- Funtzioaren lehenengo deribatuak gorapen-beherapen eta maximo-minimo erlatiboei buruzko informazioa emango digu:

$$y = \frac{x^2-3}{x^2-4} \to y' = \frac{2x\cdot(x^2-4) - 2x(x^2-3)}{(x^2-4)^2} \to y' = \frac{2x^3-8x-2x^3+6x}{(x^2-4)^2}$$
$$\to y' = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

Funtzio honen hazkundea alda daiteke deribatuaren erroetan edota asintota bertikaletara hurbiltzean:

- $y' = 0 \to \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \to -2x = 0 \to \boldsymbol{x = 0}$
- $\boldsymbol{x = 2}$ *eta* $\boldsymbol{x = -2}$ *asintota bertikalak*

Hiru balio hauek lau tartetan banatzen dute zuzen erreala. Tarte bakoitzean y' deribatuaren ikurrak funtzioa gorakorra $(y' +)$ ala beherakorra $(y' -)$ den esango digu:



<u>Laburtuz:</u>

Goratze-tarteak: $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0)$
Beheratze-tarteak: $x \in (0,2) \cup (-2,\infty)$
Maximo erlatiboak: $x = 0 \to y = \frac{(0)^2-3}{(0)^2-4} = \frac{3}{4} \to M\left(0,\frac{3}{4}\right)$
Minimo erlatiboak: ez dago

2. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu gorakortasuna- eta beherakortasun-tarteak eta maximo, minimo eta asintoten existentzia.

(2018ko UZTAILA-A)

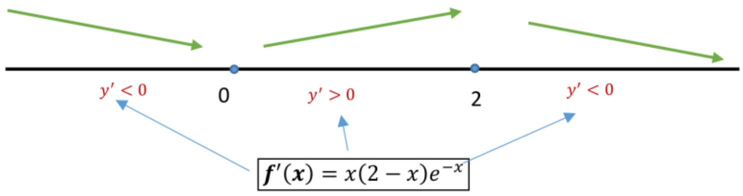
Gorakortasuna-beherakortasuna. Maximo-minimoak.

$f(x) = x^2e^{-x}$

Deribatua aztertuko dugu, honen ikurrak zein tartetan funtzioa gorakorra eta zein beherakorra den esango digu; baita muturrik duen ere:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2e^{-x} \cdot (-1) \to f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \to x(2-x)e^{-x} = 0 \to \begin{array}{l} \cancel{e^{-x} = 0} \\ x = 0 \to \boldsymbol{x = 0} \\ 2 - x = 0 \to \boldsymbol{x = 2} \end{array}$$



Goratze-tarteak: $x \in (0,2)$

Beheratze-tarteak: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Maximo erlatiboak: $x = 2, \to f(2) = (2)^2e^{-2} = 0 \to \boldsymbol{Max.\,(2, 4e^{-2})}$

Minimo erlatiboak: $x = 0, \to f(0) = (0)^2e^{0} = 0 \to \boldsymbol{min.\,(0,0)}$

Asintotak

- Asintota horizontala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \ (konstantea); orduan, \boxed{\boldsymbol{y = k}} \ \boldsymbol{Asintota\ Horizontala}$$

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \ (e^x \gg x^2 \ delako) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = 0}} \Rightarrow$$

$\boldsymbol{Asintota\ Horizontala}$

$x \to \infty \ doanean$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (-\infty)^2 \cdot e^{-(-\infty)} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \Rightarrow$$

$x \to -\infty$ doanean ez du asintota horizontalalik

Funtzioa ∞ doa; adar parabolikoa du Y ardatzaren norabidean.

- Asintota bertikala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \;;orduan, \qquad \boxed{\boldsymbol{x=a}}\ \boldsymbol{Asintota\ bertikala}$$

Ez du asintota bertikalik, $\lim_{x\to a} x^2e^{-x} = \lim_{x\to a}\frac{x^2}{e^x} = 0 \neq \pm\infty$ delako; ez dago **a**-ren balio finitorik, non $x \to a$ doala funtzioa infiniturantz doan.

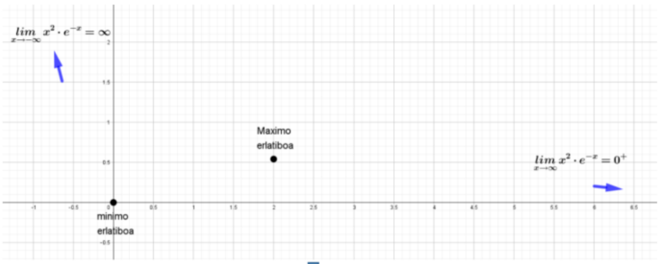
- Asintota zeiharra $y = mx + n$ izateko:

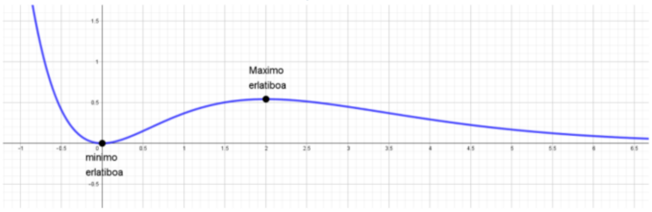
$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \neq 0 \;\; eta \;\neq \pm\infty \quad \textbf{eta} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) \neq \pm\infty$$

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{ez\ du\ asintota\ zeiharrik}$$

<u>**Adierazpen grafikoa:**</u>





Minimo erlatiboa , minimo absolutua da, funtzioak ezbaitu balio txikiagorik hartzen (x=0 denean funtzioaren balioa y=0).

3. Jakinik $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioaren grafikoa (1,0) puntutik pasatzen dela eta x=0 puntuan 1 balioa hartzen duen muturra dela,

a. Kalkulatu A, B eta C.

b. x=0 muturra zer da, maximoa ala minimoa?

(2018ko UZTAILA-A)

(a)

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Azter dezagun emandako informazioa banan-banan:

- Funtzioaren grafika (1,0) puntutik igarotzen da; beraz:

$$f(1) = 0 \;\Rightarrow\; 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C = 0 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A + B + C = -1}}$$

- x=0 denean funtzioaren balioa (muturra dela ondoren erabiliko da) 1 da; beraz:

$$f(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0^3 + A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C = 1 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 1}}$$

- x=0 denean funtzioak muturra du; beraz, lehenengo deribatua anulatu egingo da x=0 ordezkatzean (beharrezko baldintza muturra izateko):

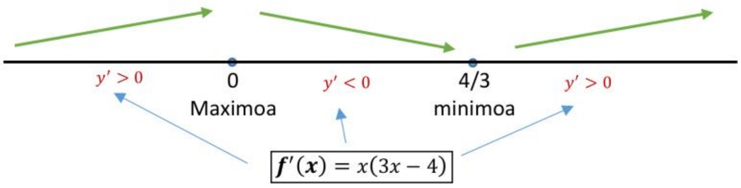
$$f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 0^2 + 2A \cdot 0 + B = 0 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{B = 0}}$$

Ondorioz,

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = -1 \\ C = 1 \\ B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \boldsymbol{A = -2} \\ \boldsymbol{B = 0} \\ \boldsymbol{C = 1} \end{array} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + 1}}$$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$

Deribatuaren erroetan muturrak aurkitzen dira: $f'(x) = 0 \Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{array}$



Hortaz, x=0 abszisa-puntuan funtzioak duen muturra maximo erlatiboa da. Beste mutur bat ere badu, x=4/3 denean minimo erlatiboa.

4. Har dezagun $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$ funtzioa:

a. Kalkula ezazu A, B eta C, jakinik $x = 0$ abszisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea horizontala dela, $x = 2$ abszisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, OX ardatza ebakitzen duela $x = 1$ denean.

b. Lortutako balioetarako, kalkulatu funtzioaren maximoak eta minimoak.

(2017ko EKAINA-A)

$$f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C$$

x=0 denean ukitzailearen malda = 0 → $f'(0)=0$ $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 4\cdot 0^3 + 3A\cdot 0^2 + 2B\cdot 0 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

x=2 denean mutur erlatiboa, hau da, $f'(2)=0$ $\Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 4\cdot 2^3 + 3A\cdot 2^2 + 2B\cdot 2 + \overset{=0}{C} = 0$

$32 + 12A + 4B = 0$

$12A + 4B = -32 \xrightarrow{(:4)} \boxed{3A + B = -8}$

x=1 denean, funtzioaren grafikak OX ardatza ebaki; hau da $f(1)=0$ $\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + A\cdot 1^3 + B\cdot 1^2 + \overset{=0}{C}\cdot 1 + 7 = 0$

$1 + A + B + 0 + 7 = 0$

$\boxed{A + B = -8}$

$$\left.\begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ A + B = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0 \text{ eta } B = -8$$

Beraz, funtzioaren adierazpena: $\boxed{f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}$

b) $f'(x) = 4x^3 - 16x \xrightarrow{f'(x)=0} 4x^3 - 16x = 0$

$4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$; $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$, $\boxed{x=-2}$

$-\infty$		-2		0		2		∞
	$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$	
	$f \searrow$		$f \nearrow$		$f \searrow$		$f \nearrow$	
		minimo erlatiboa		Maximo erlatiboa		minimo erlatiboa		

$x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8\cdot(-2)^2 + 7 = 16 - 32 + 7 = -9 \rightarrow \boxed{m_1(-2,-9)}$ minimo erlatiboa edo lokala

$x = 0 \rightarrow f(0) = 7 \rightarrow \boxed{M(0,7)}$ Maximo erlatiboa

$x = 2 \rightarrow f(2) = -9 \rightarrow \boxed{m_2(2,-9)}$ minimo erlatiboa

5. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x}{1-x^2}$

a. Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra?
b. Arrazoitu ea maximoa eta minimorik duen. Baizkoan aurki ezazu.
c. Kalkulatu kurba horrek $x = 0$ abszisako puntuan duen zuzen ukitzailea.

(2017ko EKAINA-B)

(a,b)

Definizio-eremua: $\mathbb{R} - \{\mathbf{-1, 1}\}$

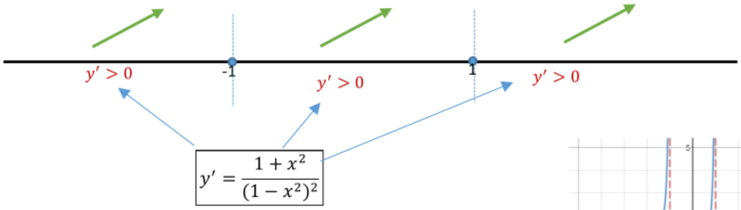
Lehenengo deribatuaren ikurren azterketa:

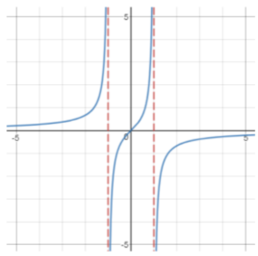
$$y = \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y' = \frac{1\cdot(1-x^2) - x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} \rightarrow y' = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} \rightarrow y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

Jakina denez, funtzio baten zeinua alda daiteke funtzioaren erroetan edota ez-jarraitasun puntuetan. Deribatuaren erroak eta ez-jarraitasun puntuak (izendatzailearen zeroak):

- $y' = 0 \rightarrow \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow 1 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow ez\ du\ soluziorik. deribatuak\ ez\ du\ errorik.$
- $Izendatzailea = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \boxed{x = -1} \end{cases} Asintota\ bertikalak$

Balio hauek zuzen errealean kokatu eta gero, tarte bakoitzean y' deribatuak hartzen duen ikurra aztertuko da tarteko edozein balio deribatuan ordezkatuz:





Goratze-tarteak:	$x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$
Beheratze-tarteak:	ez da beherakorra
Maximo erlatiboak:	ez du maximorik
Minimo erlatiboak:	ez du minimorik

(c)

$$x = 0\ denean\ funtzioaren\ balioa: f(0) = \frac{0}{1-0^2} = 0 \ \rightarrow P(0,0)$$

Zuzen ukitzailearen malda kalkulatzeko, $x = 0$ deribatuan ordezkatu behar da:

$$y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \rightarrow \boldsymbol{m} = y'(0) = \frac{1+0^2}{(1-0^2)^2} = \mathbf{1}$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$\left.\begin{matrix} P(0,0) \\ m = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \ \rightarrow \ y = 0 + 1\cdot(x - 0) \ \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = x}}$$

LAN-FITXA D.E.1

DERIBATUEN ERABILERAK I (Ariketa ebatziak)

1. $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2-4}$ funtzioa emanik:
   a. Kalkulatu f-ren asintotak.
   b. Adierazi zer tartetan den gorakorra eta zer tartetan beherakorra.
   c. Muturrik al du f funtzioak? Horrela balitz, zein puntutan?

(2018ko EKAINA-B)

2. Izan bedi $f(x)=x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu gorakortasuna- eta beherakortasun-tarteak eta maximo, minimo eta asintoten existentzia.

(2018ko UZTAILA-A)

3. Jakinik $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ funtzioaren grafikoa (1,0) puntutik pasatzen dela eta x=0 puntuan 1 balioa hartzen duen muturra dela,
   a. Kalkulatu A, B eta C.
   b. X=0 muturra zer da, maximoa ala minimoa?

(2018ko UZTAILA-A)

4. Har dezagun $f(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+7$ funtzioa:
   a. Kalkula ezazu A, B eta C, jakinik $x=0$ abszisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea horizontala dela, $x=2$ abszisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, OX ardatza ebakitzen duela $x=1$ denean.
   b. Lortutako balioetarako, kalkulatu funtzioaren maximoak eta minimoak.

(2017ko EKAINA-A)

5. Funtzio hau emanda: $y=\frac{x}{1-x^2}$
   a. Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra?
   b. Arrazoitu ea maximoa eta minimorik duen. Baizkoan aurki ezazu.
   c. Kalkulatu kurba horrek $x=0$ abszisako puntuan duen zuzen ukitzailea.

(2017ko EKAINA-B)

6. Badakigu $y=2x-10$ zuzena $f(x)=x^3+Ax^2+Bx-1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1,-8)$ puntuan.
   a. Kalkulatu A-ren eta B-ren balioak.
   b. Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y=-15x-1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebaki-puntuak.

(2017ko UZTAILA-A)

7. Funtzio hau emanda: $y=\frac{x^3+4}{x^2}$
   a. Arrazoitu ea funtzioak maximo edo minimorik dituen ala ez. Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.
   b. Zer tartetan da gorakorra funtzioa?
   c. Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

(2017ko UZTAILA-A)

8. Azter ezazu funtzio honen goratze- eta beheratze-tarteak: $y=\frac{x^3}{x^2-4}$

   Eta kalkula itzazu haren maximoak eta minimoak.

(2016ko EKAINA-A)

9. Funtzio hau emanda: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

a) Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak, funtzioak propietate hauek bete ditzan:
   - (0,0) puntutik pasatzea.
   - Maximo lokal bat izatea (1,2) puntua.

b) Kalkula itzazu x aldagaiaren balio guztiak zeinetan funtzioaren grafikoak ukitzaile horizontala baitu.

(2016ko EKAINA-B)

10. Kalkula itzazu A, B, C eta D balioak funtzio honek: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ mutur erlatiboak izan ditzan (0,0) eta (2,2) puntuetan.

(2016ko UZTAILA-A)

11. Funtzio polinomiko hau emanda: $p(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$

a) Kalkula itzazu p(x)-ren goratze- eta beheratze-tarteak.

b) Aurkitu haren maximoak eta minimoak.

c) Ba al da x-ren balioren bat $p(x) < 0$ izatea dakarrena? Arrazoitu zergatia.

(2016ko UZTAILA-B)

12. Polinomio hau emanda: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Zehaztu a, b eta c koefizienteak, jakinik $x = -1$ eta $x = 1$ balioetan mutur erlatiboak dituela eta gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen dela.

b) Aztertu bi mutur erlatibo horien izaera (maximoak ala minimoak diren) eta egin polinomioaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2015ko EKAINA-A)

13. Izan bedi funtzio hau: $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

a) Kalkulatu f funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.

b) Kalkulatu f-ren mutur erlatiboak (maximo eta minimoak).

(2015ko EKAINA-B)

14. Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontala eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

(2015ko UZTAILA-A)

15. Funtzio hau emanda:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & baldin\ x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & baldin\ x > 2 \end{cases}$$

a) Aurkitu a eta b-ren balioak, jakinik f zuzen erreal osoan deribagarria dela.

b) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x=1 abszisa puntuan.

(2015ko UZTAILA-B)

16. Har dezagun funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + c$

a) Lor itzazu a-ren, b-ren eta c-ren balioak, funtzioa koordenatu jatorritik pasa dadin eta (1,-1) puntuan minimo bat izan dezan.

b) Hala lortutako funtzioak ba al du beste maximorik edo minimorik?

(2014ko EKAINA-A)

17. Badakigu F funtzioa puntu guztietan deribagarria dela, $(-\infty, 0]$ tartean $F(x) = 1 + 2x + Ax^2$ formulak definitzen duela eta $(0, \infty)$ tartean, berriz, formula honek: $F(x) = B + Ax$

a) Aurkitu ezazu zer balio izan behar duten A-k eta B-k aurreko baldintzak bete daitezen.
b) Irudika ezazu F.

(2014ko EKAINA-B)

18. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funtzioa emanda, azter itzazu haren goratze- eta beheratza-tarteak eta maximo eta minimoak.
Egin itzazu f-ren gutxi gorabeherako grafiko bat, eta erantzun iezaiozu, arrazoituz, galdera honi: x-ren zenbat baliok betetzen dute f(x)=0 izatea?

(2014ko UZTAILA-A)

19. Badakigu A eta B zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura, A·B; maximoa izan dadin.

(2014ko UZTAILA-B)

20. f funtzioa ekuazio honek definitzen du: $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ Kalkula itzazu, arrazoituz:

a) *f(x)* funtzioaren definizio eremua.
b) *f(x)* funtzioaren goratze- beheratze-tarteak.
c) Egin ezazu funtzio horren grafikoaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2013ko EKAINA-A)

21. 200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat.
Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azaleren baturak minimoa izan behar du.

(2013ko EKAINA-B)

22. Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurotan adierazita) irekia duen n denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera: $B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.
b) Irabazi maximo horien balioa.

(2013ko UZTAILA-A)

23. $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa emanda:

a) Kalkula itzazu *A, B* eta *C* parametroen balioak, funtzioak *x=0* abszisa-puntuan mutur bat izan dezan eta *x=2* puntuan beste mutur bat. Balio bakarrekoak dira parametro horiek?
b) Zehaztu ezazu zer mutur mota den (maximoa edo minimoa).
c) Irudika ezazu funtzioa ¨*C=0* kasuan

(2013ko UZTAILA-B)

24. $f(x) = Ax^3 + \mathrm{B}x$ funtzioa izanik, badakigu P(1,1) puntutik pasatzen dela eta, gainera, puntu horretan haren tangentea $y = -3x$ zuzenaren paraleloa dela.

a) Datu horiek jakinik, kalkula itzazu A-ren eta B-ren balioak.
b) Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak; azkenik, marraztu ezazu funtzioa. (2012ko EKAINA-A)

25. Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.
Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.

(2012ko EKAINA-B)

26. Har dezagun $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa:

a) Kalkula ezazu A, B, eta C parametroen balioak *f*-ren grafikoa (1,1) puntutik pasa dadin, *x=4* balioan maximo bat izan dezan eta *x=0* balioan ukitzaile horizontal bat izan dezan.
b) Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak, eta marraztu ezazu funtzioaren grafikoa.

(2012ko UZTAILA-A)

27. Denda batean olioa saltzen da 2 eurotan litroa. *x* litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adierazita) hauek dira: $0{,}5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu C-ren balioa eta lortutako etekin maximoa:

(2012ko UZTAILA-B)

28. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-2x}$ funtzioa.

a) Aztertu funtzioaren gorapen- eta beherapen-tarteak.
b) Aztertu funtzioaren maximo eta minimoak eta egin haren grafikoaren eskema.

(2011ko EKAINA-A)

29. Izan bedi $f(x) = x^3 + ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$.
Aurkitu a, b eta c parametroen balioak baldintza hauek aldiberean bete daitezen: *f* funtzioaren grafikoa (0,1) puntutik igarotzen da, *f* funtzioaren ukitzaileak *x=0* eta *x=1* balioetarako $y = 3x + 5$ zuzenarekin paraleloak dira.

(2011ko EKAINA-B)

30. Aztertu funtzio honen muturrak eta asintotak: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Egin grafikoaren eskema.

(2011ko UZTAILA-A)

31. *f* funtzio bati buruz datu hauek ezagunak dira: ℝ osoan deribagarria da, ℝ osoan gorakorra da eta puntu guztietan *f(x)>0* desberdintza betetzen da. Datu horiekin froga ahal daiteke $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ gorakorra dela ℝ osoan? Erantzuna arrazoitu.

(2011ko UZTAILA-B)

32. Aztertu $f(x) = x^3 - 12\mathrm{x} - 8$ funtzioaren maximo eta minimoak eta gorapen- eta beherapen-tarteak. Adierazi grafikoki *f* funtzioa.

(2010ko EKAINA-A)

33. Idatzi $y = 10x + 2$ zuzenarekiko paraleloak diren eta $f(x) = 4x^3 - 2\mathrm{x} + 1$ kurbaren ukitzaileak diren zuzenen ekuazioak. Aztertru *f* funtzioaren maximo eta minimoak.

(2010ko EKAINA-A)

34. Merkatari batek kafea saltzen du 2 € eta 75 zentimotan kiloa. Bi motatako gastuak ditu, merkantziaren garraioa eta herri-ogasunari ordaindu beharreko zerga bat. Saltzen duen kilo bakoitzeko, garraioaren gastua 25 zentimokoa da. Herri-ogasunari ordaindu beharreko euro kopurua kalkulatzeko, saldutako kilo kopuruaren karratua zati 1200 egin behar da. Aurreko datuekin kalkulatu merkatariak saldu behar duen kilo kopurua irabazia maximoa izateko, eta kalkulatu irabazi maximo hori. (2010ko UZTAILA-A)

5 **Determina a, b, c y d para que la función:**

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).

$g(x)$ tiene un máximo relativo en (0, 4) $\to \begin{cases} g(0)=4 \\ g'(0)=1 \end{cases}$

$g(x)$ tiene un mínimo relativo en (2, 0) $\to \begin{cases} g(2)=0 \\ g'(2)=0 \end{cases}$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(0) = 4 \to d = 4$

$g'(0) = 0 \to c = 0$

$g(2) = 0 \to 8a + 4b + 4 = 0$

$g'(2) = 0 \to 12a + 4b = 0$

$\left.\begin{matrix} 4a + 2b = -1 \\ 12a + 4b = 0 \end{matrix}\right\} \to a = \dfrac{1}{2},\ b = -2$

La función buscada es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4$.

Es una función polinómica de tercer grado en la que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, luego (0, 4) es el máximo relativo y (2, 0) es el mínimo, por estar el primero a la izquierda del segundo.

6 **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

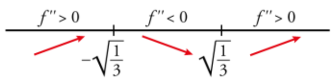
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Buscamos los puntos donde la derivada de $f''(x)$ es 0:

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \to 6x^2 - 2 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} f'(\sqrt{3}/3) = (-3\sqrt{3})/8 \\ f'(-\sqrt{3}/3) = (3\sqrt{3})/8 \end{cases}$$

Estudio del signo de f'':



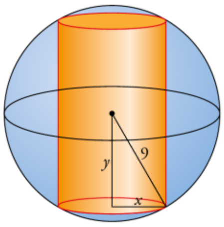
$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

En $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo de $f'(x)$ y en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

7 **De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamaremos x al radio del cilindro e y a la mitad de la altura. Entonces:

$$x^2 + y^2 = 81 \to y = \sqrt{81 - x^2} \text{ donde } x \in (0, 9).$$

El volumen del cilindro es:

$$V(x) = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2}$$

Para hallar el de volumen máximo calculamos el máximo relativo de la función anterior.

$$V'(x) = 2\pi\left(2x\sqrt{81 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{81 - x^2}}\right) = -6\pi\frac{x(x^2 - 54)}{\sqrt{81 - x^2}}$$

$$V'(x) = 0 \to x(x^2 - 54) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)}, \ x = -3\sqrt{6} \text{ (no vale)}, \ x = 3\sqrt{6}$$

Estudiamos los signos de $V'(x)$ cerca del punto singular:

$$\underset{\nearrow}{V' > 0} \quad 3\sqrt{6} \quad \underset{\searrow}{V' < 0} \to \text{En } x = 3\sqrt{6} \text{ hay un máximo relativo.}$$

$$x = 3\sqrt{6} \to \text{radio} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$y = 3\sqrt{3} \to \text{altura} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V(3\sqrt{6}) = 2\pi \cdot 54 \cdot \sqrt{81 - 54} \approx 1\,763 \text{ cm}^3$$

8 **La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica la igualdad $f(-2) = f(2)$.**
Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

El teorema de Rolle dice que si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Comprobamos si la función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$:

- Veamos si f es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

  f es continua en $[-2, 2]$

- Estudiamos la derivabilidad de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(1^-) \ne f'(1^+)$. f no es derivable en $x = 0 \to f$ no es derivable en $(-2, 2)$.

- f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle; por tanto, no podemos asegurar que exista un $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. En este caso quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

72 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

73 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

74 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

- Continuidad:

— Si $x \neq 2 \;\rightarrow\; f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x = 2$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser } 4 + 2a + b = 2c + 1; \\ \text{es decir: } 2a + b - 2c = -3\end{array}$$

- Derivabilidad:

— Si $x \neq 2 \;\rightarrow\; f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

— En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

- $\left.\begin{array}{l} f(0)=b \\ f(4)=4c+1 \end{array}\right\} \; b = 4c + 1$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$, ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b-2c=-3 \\ 4+a=c \\ b=4c+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-3 \\ b=5 \\ c=1 \end{array}$$

En este caso sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x-3=0 \;\to\; x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

Página 301

75 Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ln\,(3^x + x) + ln\,(x^2 - 10x + 20)}}$$

demuestra que existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.

Consideremos la función $g(x) = 3^x + x$.

$g'(x) = 3^x\,ln\,3 + 1 > 0 \;\to\; g(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. En particular lo es en el intervalo $[1, 2]$.

Luego $g(x) > g(1) = 4$ cuando $x \in [1, 2] \;\to\; ln\,[g(x)] > ln\,[g(1)] = ln\,4 > 0$ cuando $x \in [1, 2]$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Consideremos ahora la función $h(x) = x^2 - 10x + 20$.

$h'(x) = 2x - 10 < 0$ cuando $x \in [1, 2] \;\to\; h(x)$ decreciente en $x \in [1, 2] \;\to\; h(x) > h(2) = 4 \;\to$
$\to\; ln\,[h(x)] > ln\,[h(1)] = ln\,4 > 0$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Por tanto, el radicando de $f(x)$ es la suma de dos números positivos y la raíz está bien definida.

$f(x)$ es derivable en el intervalo $[1, 2]$.

$f(x)$ es derivable en $(1, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{ln\,4+ln\,11} \\ f(2)=\sqrt{ln\,11+ln\,4} \end{array}\right\} \to f(1) = f(2)$$

Por el teorema de Rolle existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

76 **[La justificación de la validez de las afirmaciones permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

a) Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea $y = 1$.

b) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, entonces f no puede tener ni máximo ni mínimo en $x = a$.

c) Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en $x = 2$, ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.

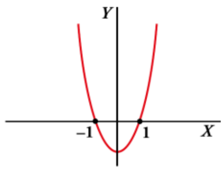
d) Una función continua en [0, 5], que no es derivable en $x = 3$, no puede tener un máximo en $x = 3$.

e) Si $y = f(x)$ es creciente en $x = a$, entonces $y = -f(x)$ es decreciente en $x = a$.

f) Si $f'(a) = 0$, f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

g) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = -5$, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Si esta es la gráfica de $f'(x)$, entonces f tiene un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.



a) Verdadero.

Las funciones $y = sen\ x$ o $y = cos\ x$ tienen infinitos puntos en los que la recta tangente es $y = 1$. Sucede en los máximos relativos de la función.

b) Falso.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ tiene un mínimo relativo en (0, 0) y $f'(0) = f''(0) = 0$

c) Verdadero.

La razón es que en un polinomio de tercer grado $p(x)$ ocurre que:

$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$

o bien,

$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

Los polinomios de tercer grado no tienen ni máximos ni mínimos absolutos.

d) Falso.

La función $y = 2 - |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$ y tiene un máximo en ese punto.

e) Verdadero.

Supongamos que $f(x)$ es creciente en $x = a$.

Entonces existe un entorno E en el que si $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.

Pero $f(x_1) < f(x_2) \to -f(x_1) > -f(x_2)$. Luego $-f(x)$ es decreciente en ese mismo entorno E.

f) Falso.

La función $y = x^3$ es creciente en $x = 0$, pero $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

g) Verdadero.

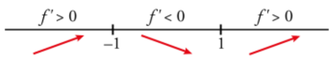
Si $f''(a) = -5 \to$ Existe un entorno de $x = a$ en el que $f''(x)$ es decreciente.

Como $f''(a) = 0$, en ese entorno, $f''(x) > 0$ cuando $x < a$ y $f''(x) < 0$ cuando $x > a$.

Por tanto, la función pasa de cóncava a convexa y tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Falso.

La tabla de los signos de la primera derivada es:



Por tanto, tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

Para profundizar

77 **En un experimento se han realizado cinco medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:**

$$m_1 = 0{,}92;\ m_2 = 0{,}94;\ m_3 = 0{,}89;\ m_4 = 0{,}90;\ m_5 = 0{,}91$$

Se tomará como mejor aproximación a la medida real el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función:

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \ldots + (x - m_5)^2$$

alcanza el mínimo. Calcula dicho valor de x.

$E(x) = (x - 0{,}92)^2 + (x - 0{,}94)^2 + (x - 0{,}89)^2 + (x - 0{,}90)^2 + (x - 0{,}91)^2$

$E'(x) = 2(x - 0{,}92) + 2(x - 0{,}94) + 2(x - 0{,}89) + 2(x - 0{,}90) + 2(x - 0{,}91) = 10x - 9{,}12$

$E'(x) = 0 \to x = 0{,}912$

$E''(x) = 10 > 0$ para todo x, por tanto, en $x = 0{,}912$ la función alcanza un mínimo.

Ese mínimo es:

$E(0{,}912) = 0{,}00148$

78 **Demuestra que existe $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{-1}{4}$ siendo $f(x) = [x^2 + log(x^2 - 2x + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$**
Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$\alpha(x) = x^2 + log\,(x^2 - 2x + 7)$ es derivable en el intervalo $(-3, 1)$ porque $x^2 - 2x + 7 > 0$ para todo x y, por tanto, $log\,(x^2 - 2x + 7)$ es derivable:

$$\alpha'(x) = 2x + \frac{2(x+1)}{(x^2 - 2x + 7)\,ln\,10}$$

$\beta(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{4}}$, también es derivable en $(-3, 1)$ aunque, tiene tangente vertical en $x = 3$ ya que:

$$\beta'(x) = -\frac{1}{3(6-2x)^{2/3}}$$

Por tanto, en el intervalo $(-1, 3)$, $f(x)$ es derivable, la derivada es:

$$\phi(x) = \alpha(x)^{\beta(x)} \to \phi'(x) = \alpha(x)^{\beta(x)}\left[\beta'(x)\cdot ln\,\alpha(x) + \beta(x)\,\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right]$$

y, por lo que hemos visto, existe en todos los puntos del intervalo.

Por otra parte, $f(x)$ es continua en $[-1, 3]$ porque lo son las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$.

Veamos ahora:

$f(-1) = [1 + log\,(1 + 2 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3+1}{4}}} = (1 + 1)^1 = 2$

$f(3) = [9 + log\,(9 - 6 + 7)]^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}} = 10^0 = 1$

Por tanto, por el teorema del valor medio, existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que:

$$f(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4}$$

79 **Cuando un globo está a 200 m sobre el suelo y se eleva a 15 m/s, un automóvil pasa bajo él con velocidad de 45 km/h. ¿Con qué velocidad se separan coche y globo un segundo después?**

Ten en cuenta lo siguiente:

— El globo está a $200 + 15t$ m de altura en el instante t.

— El coche está a $(45/3,6) \cdot t$ m de la vertical del globo.

Halla la distancia entre ambos y averigua la velocidad de alejamiento cuando $t = 1$.

La distancia entre el coche y el globo en función del tiempo es:

$$d(t) = \sqrt{(200+15t)^2 + \left(\frac{45}{3,6}t\right)^2} = \sqrt{381,25t^2 + 6\,000t + 40\,000}$$

La velocidad de alejamiento es la derivada del espacio que los separa.

$$d'(t) = \frac{762,5t + 6\,000}{2\sqrt{381,25t^2 + 6\,000t + 40\,000}}$$

Al cabo de 1 segundo es:

$$d'(1) = \frac{762,5 + 6\,000}{2\sqrt{381,25 + 6\,000 + 40\,000}} = 15,7 \text{ m/s}$$

AUTOEVALUACIÓN

Página 301

1 Halla los puntos de la función:

$$f(x) = ln\ \frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}$$

en los que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, la pendiente de la recta tangente debe ser 2.

$$f(x) = ln\ (1 - cos\ x) - ln\ (1 + cos\ x)$$

$$f'(x) = \frac{sen\ x}{cos\ x + 1} - \frac{sen\ x}{cos\ x - 1} = \frac{-2\ sen\ x}{cos^2 x - 1} = \frac{-2\ sen\ x}{-sen^2 x} = \frac{2}{sen\ x}$$

ya que $sen\ x \neq 0$ (en caso contrario no estaría definida la función).

$$f'(x) = 2 \ \rightarrow\ \frac{2}{sen\ x} = 2 \ \rightarrow\ sen\ x = 1 \ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

2 Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de la función siguiente:

$$f(x) = x|x - 2|$$

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} -x(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 2$ porque $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} -2x + 2 = 0 \ \rightarrow\ x = 1 < 2 \\ 2x - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = 1 \not> 2 \end{cases}$$

La tabla de los signos de la derivada primera es:

$f' > 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(1, 2)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es convexa es $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

3 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^x(cos\ x + sen\ x)$ y determina sus máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$.

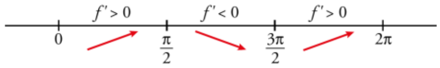
Consideramos la función: $f(x) = e^x(cos\ x + sen\ x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(cos\ x + sen\ x) + e^x(-sen\ x + cos\ x) = e^x(2\ cos\ x) = 2e^x\ cos\ x$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ cos\ x = 0 \ \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \ (\text{para } x \in [0, 2\pi])$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$.

4 **a) Estudia la curvatura de la siguiente función: $f(x) = x^2 \ln x$**

b) Escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por su punto de inflexión.

a) • El dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$.

- f es cóncava en los intervalos donde $f'' > 0$ y convexa si $f'' < 0$.
- Calculamos f' y f'':

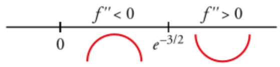
$$f(x) = x^2 \cdot \ln x \to f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \to 2 \ln x + 3 = 0 \to \ln x = -\frac{3}{2} \to x = e^{-3/2} \to f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3}$$

- Estudiamos el signo de f'' teniendo en cuenta el dominio de f, $(0, +\infty)$, y el punto donde $f''(x) = 0$, $x = e^{-3/2} \approx 0{,}22$:

Signo de la derivada:



- Conclusiones:
  - — f es convexa en $(0, e^{-3/2})$.
  - — f es cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$.
  - — Punto de inflexión: $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

b) • Pendiente de la recta tangente en $x = e^{-3/2}$:

$$m = f''(e^{-3/2}) = e^{-3/2}\,(2 \ln e^{-3/2} + 1) = e^{-3/2}\left[2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right] = -2e^{-3/2}$$

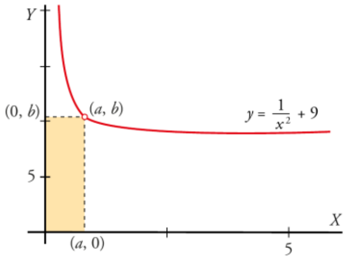
- Ecuación de la recta tangente en $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$:

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3} - 2e^{-3/2}(x - e^{-3/2})$$

Página 300

59 Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), (a, 0), (0, b) y (a, b), donde $a > 0$, $b > 0$ y, además, el punto (a, b) está situado en la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{x^2} + 9$.

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones, determina el rectángulo de área mínima y calcula dicha área mínima.



Tenemos la igualdad: $b = \dfrac{1}{a^2} + 9$

Área $= A = ab = a\left(\dfrac{1}{a^2} + 9\right) = \dfrac{1}{a} + 9a$

$A' = 9 - \dfrac{1}{a^2} = 0 \rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

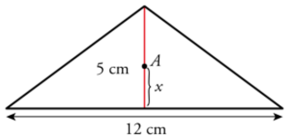
$A'' = \dfrac{2}{a^3} \rightarrow A'' > 0$ cuando $a = \dfrac{1}{3}$, por tanto, para este valor de a, la función alcanza un mínimo.

Buscamos ahora el valor de b:

$b = \dfrac{1}{a^2} + 9 = \dfrac{1}{(1/3)^2} + 9 = 18$

El área mínima se alcanza cuando $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = 18$. Dicha área será de 6 u^2.

60 Considera un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base, de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observa la figura:



a) Demuestra que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) Calcula el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcula dicha cantidad mínima.

a) Distancia de A a los vértices de la base: $\sqrt{36 + x^2}$

Distancia de A al vértice superior: $5 - x$

La suma de las tres distancias es $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$

b) $f'(x) = -1 + \dfrac{2x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \rightarrow \dfrac{-\sqrt{36 + x^2} + 2x}{\sqrt{36 + x^2}} = 0 \rightarrow \sqrt{36 + x^2} = 2x \rightarrow 36 + x^2 = 4x^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = 2\sqrt{3}$

$f''(x) = \dfrac{72}{(36 + x^2)^{3/2}}$

La segunda derivada es positiva para cualquier valor de x, por tanto, en $x = 2\sqrt{3}$ se alcanza un mínimo de la función.

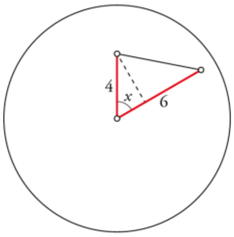
c) $f(2\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{36 + 12} = 5 - 2\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{48} = 5 + 6\sqrt{3}$

61 **Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.**

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(x) = 12 sen\, x$, donde x es el ángulo que forman las manecillas.

b) Halla x para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

a)



Si llamamos x al ángulo que forman las manecillas, la altura del triángulo sobre la manecilla mayor es $a = 4\, sen\, x$.

El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{6 \cdot 4\, sen\, x}{2} = 12\, sen\, x$, con $x \in (0, \pi)$ para que se pueda construir el mismo.

b) $A'(x) = 12\, cosx$

$A'(x) = 0 \rightarrow 12\, cos\, x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

$A''(x) = -12\, sen\, x$

$A''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -12 < 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ A\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 12$ es el máximo relativo.

Las manecillas deben ser perpendiculares para que el área sea máxima y ésta es de 12 cm^2.

62 **La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$ con $t \geq 0$.**

a) ¿En qué instante del intervalo [0, 3] se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

a) $v(0) = 0$ m/s

$v(3) = 15/e^3 = 0{,}75$ m/s

Vamos a ver ahora si tiene máximos o mínimos en el interior del intervalo:

$v'(t) = -(t^2 - 2)e^{-t} = 0 \rightarrow t^2 - 2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{2}$ (no consideramos la raíz negativa).

$t = \sqrt{2}$ está en el intervalo (0, 3) por tanto, calculamos la velocidad de la partícula en ese instante.

$v(\sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = 1{,}17$ m/s

El mínimo se alcanza en el instante $t = 0$ s y el máximo en el instante $t = \sqrt{2}$s.

b) $(t^2 + 2t)e^{-t} = \dfrac{t^2 + 2t}{e^t}$

El numerador es una función polinómica y el denominador es una función exponencial de exponente positivo (un infinito de orden superior), por tanto, la función tiende a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$. Esto quiere decir que la partícula tiende al reposo con el paso del tiempo.

63 **Dada f: [1, e] $\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + ln\, x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x},\ x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ f'(1) = 0;\ f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

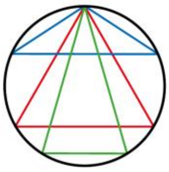
Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tengente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + ln\ 2;\ f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + ln\ 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

64 Análisis asociativo. **[El docente puede plantear preguntas alrededor de la situación planteada por el problema para trabajar esta estrategia].**

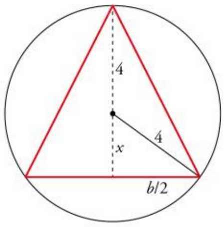
Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima, inscrito en una circunferencia de 4 m de radio.



Cada triángulo isósceles cuya base se encuentre por encima del diámetro horizontal se corresponde con otro que tiene la misma base y está situado por debajo del diámetro horizontal. El área de este segundo triángulo es necesariamente mayor que la del primero porque tiene la misma base y mayor altura. Por eso podemos limitarnos a los triángulos cuya base queda por debajo del diámetro horizontal.

Si llamamos x a la distancia del centro de la circunferencia a la base del triángulo y b a la medida de la base tenemos:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{16-x^2} \ \to\ b = 2\sqrt{16-x^2} \ \text{ con } x \in [0, 4)$$



El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{2\sqrt{16-x^2}(x+4)}{2} = \sqrt{16-x^2}(x+4)$.

$$A'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}(x+4) + \sqrt{16-x^2} = -2\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \ \to\ x^2 + 2x + 8 = 0 \ \to\ x = 2,\ x = -4 \ \text{(no vale)}$$

El área máxima se podrá dar en $x = 0$, por ser un extremo del intervalo, o en $x = 2$.

$x = 0$, $A(0) = 16\ \text{cm}^2$

$x = 2$, $A(2) = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785\ \text{cm}^2$ (área máxima)

La base del triángulo mide $4\sqrt{3}$ cm y la altura, 6 cm.

Cuestiones teóricas

65 Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$: por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica la hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \ \to\ x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

66 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]? En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.**

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4); luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 4].

Veamos en que punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \frac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{3}$

67 **Se tiene la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0] y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

Veamos que $f(x)$ es continua en [–2, 0]:

- Si $x \ne -1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en [–2, 0].

Veamos que $f(x)$ es derivable en [–2, 0]:

- Si $x \ne -1$ y $x \in (-2, 0)$, f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$, tenemos que:

$$f'(-1^-) = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en (–2, 0).

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ x & \text{si } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0], existe algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

- $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \le -1$

$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{cases}$

- $f'(x) = x$ si $-1 \le x < 0$

$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$

- Por tanto, hay dos soluciones:

$c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = -\sqrt{2}$

68 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

El teorema de Rolle dice: Si f es una función continua en $[0, c]$ y derivable en $(0, c)$ y $f(0) = f(c)$, existe algún punto $x \in (0, c)$ tal que $f'(x) = 0$.

Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

- Continuidad:

— Si $x \ne 1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x + 1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3 \end{array}\right\}$$ Para que sea continua, ha de ser $a + b + 3 = 6$; es decir: $a + b = 3$

- Derivabilidad:

— Si $x \ne 1 \rightarrow f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

— En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable, ha de ser: $2a + b = 5$

- Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 3 - a \\ 2a + 3 - a = 5 \rightarrow a = 2 \rightarrow b = 1 \end{array}$$

- Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + x + 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow$ No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(c) = 2c^2 + c + 3 \end{array}\right\} 2c^2 + c + 3 = 1 \rightarrow 2c^2 + c + 2 = 0 \rightarrow c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4}$$ no tiene solución.

No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

69 **La función $f(x) = |cos\ x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?**

$$f(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ -cos\ x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \text{ es continua en } [0, \pi].$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \ne \dfrac{\pi}{2}$ es: $f'(x) = \begin{cases} -sen\ x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ sen\ x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

Como $f'\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right) = -1 \ne f'\left(\dfrac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

70 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \dfrac{f(5) - 3}{5 - 0} = \dfrac{f(5) - 3}{5} = 8 \rightarrow f(5) = 43$

71 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

El teorema del valor medio dice: si f es una función continua en $[2, 6]$ y derivable en $(2, 6)$, existe algún punto $c \in (2, 6)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f'(6) - f'(2)}{6 - 2}$.

- Continuidad:
  - — Si $x \ne 4 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.
  - — En $x = 4$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ f(4) = 24 - b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser: } 4a - 3 = 24 - b; \\ \text{es decir: } 4a + b = 27 \end{array}$$

- Derivabilidad:
  - — Si $x \ne 4 \rightarrow f(x)$ es derivable. Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$
  - — En $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = a \\ f'(4^+) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

- Uniendo los dos resultados obtenidos:

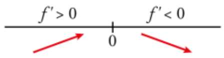
$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

b) $f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 6e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ -6e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 0$ porque las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

La primera derivada nunca se anula. Por tanto, su tabla de los signos es:



Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

$f'(x) = \begin{cases} 12e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 12e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como la segunda derivada es positiva, es cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

47 Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [–2, 3] de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = ln\,(x^2 + 1) + (x - 3)}$$

La función dada es continua en el intervalo [–2, 3] luego alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \ \rightarrow \ x = -1$

Evaluamos:

$x = -2, \ f(-2) = ln\,5 - 5 \approx -3{,}39$

$x = -1, \ f(-1) = ln\,2 - 4 \approx -3{,}31$

$x = 3, \ f(3) = ln\,10$

Su mínimo absoluto es el punto $(-2, ln\,5 - 5)$ y su máximo absoluto es el punto $(3, ln\,10)$.

48 a) Siendo $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $P(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcula los extremos relativos de $h(x)$.

b) ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto?

a) $h(x) = x + f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$h'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$

$h'(x) = 0 \ \rightarrow \ 4x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

$h''(x) = 12x^2 + 6x + 2$

$h''(0) = 2 > 0 \ \rightarrow$ En $x = 0$ hay un mínimo relativo.

$x = 0, \ h(0) = 1 \ \rightarrow$ El mínimo relativo es $(0, 1)$.

b) El mínimo relativo es necesariamente un mínimo absoluto porque la función siempre decrece a su izquierda y siempre crece a su derecha.

49 El punto $P(x, y)$ recorre la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

La distancia entre $P(x, y)$ de la elipse y el origen de coordenadas es $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Está definida para valores de x en el intervalo $[-5, 5]$ y de y en el intervalo $[-3, 3]$. (Si x o y tomaran valores fuera de esos intervalos, no se cumpliría la ecuación de la elipse).

Usando la derivación implícita:

$$d' = \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por otro lado, derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2yy'}{9} = 0 \;\to\; \frac{yy'}{9} = -\frac{x}{25} \;\to\; y' = -\frac{9x}{25y}$$

Sustituyendo en la expresión de la derivada:

$$d' = \frac{xyy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + y\left(-\dfrac{9x}{25y}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{16}{25}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d' = 0 \;\to\; x = 0$$

Por tanto, las distancias máximas o mínimas se pueden alcanzar en los extremos $x = -5$, $x = 5$ o en el punto singular $x = 0$.

Calculamos las ordenadas de los puntos:

$$x = -5 \;\to\; 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \;\to\; y = 0$$

$$x = 5 \;\to\; 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \;\to\; y = 0$$

$$x = 0 \;\to\; 0 + \frac{y^2}{9} = 1 \;\to\; y = -3,\; y = 3$$

Evaluamos en los cuatro puntos obtenidos:

$x = -5,\; y = 0 \;\to\; d = 5$

$x = 5,\; y = 0 \;\to\; d = 5$

$x = 0,\; y = -3 \;\to\; d = 3$

$x = 0,\; y = 3 \;\to\; d = 3$

La distancia máxima se alcanza en los puntos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

La distancia mínima se alcanza en los puntos $(0, -3)$ y $(0, 3)$.

NOTA. Gráficamente es muy sencillo comprobar estos resultados porque la elipse dada está centrada en el origen, su semieje mayor mide 5 unidades y su semieje menor, 3. La distancia máxima se alcanza en los extremos del eje mayor y la mínima en los extremos del eje menor.

50 Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x + y$ ser menor que 7? Razona la respuesta.

Supongamos que $xy = 16$ con $x, y > 0 \;\to\; y = \dfrac{16}{x}$ con $x > 0$.

Consideremos que la función $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$, que es continua y derivable en $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

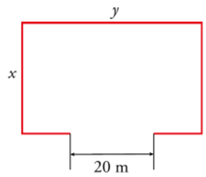
$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \;\to\; x = 4$$

$f' < 0$ ↘ 4 ↗ $f' > 0$

$x = 4$, $f(4) = 8 \;\to\; (4, 8)$ es el mínimo absoluto de la función en $(0, +\infty)$.

Así la suma mínima es 8 y, por tanto, no puede ser menor que 7.

51 **Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 m de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 m sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcula las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcula también el valor de dicha área máxima.**



Según los datos del enunciado:

$2x + y + y - 20 = 100 \rightarrow x = 60 - y$

Por otra parte:

Área $= A = xy = (60 - y)y = 60y - y^2$

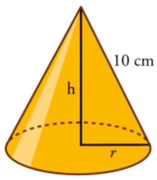
$A' = 60 - 2y = 0 \rightarrow y = 30$

Si volvemos a derivar vemos que la segunda derivada es $A'' = -2 < 0$ para cualquier x y que, por tanto, en $y = 30$ la función alcanza un máximo.

Por tanto, las dimensiones del terreno deberán ser $y = 30$ m y $x = 60 - 30 = 30$ m.

El área máxima es de $30^2 = 900$ m^2.

52 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$10^2 = r^2 + h^2 \rightarrow r = \sqrt{10^2 - h^2}$ (descartamos la raíz negativa al estar tratando con longitudes).

Volumen $= V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi(10^2 - h^2)h}{3} = \dfrac{\pi(100 - h^3)}{3}$

Por tanto:

$V' = \dfrac{\pi(100 - 3h^2)}{3} = 0 \rightarrow h = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

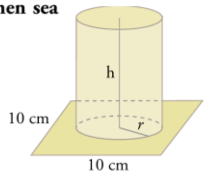
$V'' = -2\pi h$

El valor de la segunda derivada es negativo cuando $h = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$, por tanto, para este valor de h se alcanza el volumen máximo.

Finalmente:

$r = \sqrt{100 - \dfrac{100}{3}} = 10\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ cm

53 **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm². ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?**



El área lateral del cilindro es 50, por tanto:

$2\pi \mathrm{rh} = 50 \rightarrow \mathrm{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

$\text{Volumen} = V = \pi r^2\, \mathrm{h} = \pi r^2 \dfrac{50}{2\pi r} = 25r$

$V' = 25 > 0$ para todo r.

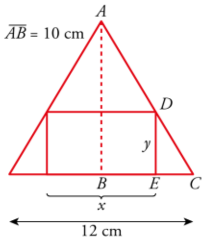
El volumen es creciente. El radio para el que volumen es máximo lo marcan entonces las dimensiones del cuadrado. Por tanto, el radio que buscamos es $r = 10 : 2 = 5$ cm.

54 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como: $\overline{AB} = 10$ cm $\quad \overline{DE} = y \quad \overline{BC} = 6$ cm $\quad \overline{EC} = \dfrac{12-x}{2}$

Tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12-x}{2}} \rightarrow \frac{10}{y} = \frac{2}{12-x}$$

$$10(12-x) = 12y \rightarrow y = \frac{10(12-x)}{12} = \frac{5(12-x)}{6} = \frac{60-5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60-5x)}{6} = \frac{60x-5x^2}{6} \rightarrow A(x) = \frac{60x-5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

Dominio = (0, 12)

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = \frac{60-10x}{6}$$

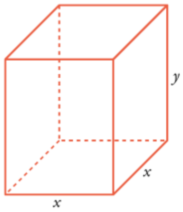
$A'(x) = 0 \rightarrow 60 - 10x = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 5$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm² (que es el área máxima).

55 Meta 7.3. **[El visionado del vídeo puede motivar un debate entre el alumnado sobre los peligros de no mejorar la eficiencia energética].**

Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



Volumen $= x^2y = 80 \text{ cm}^3 \to y = \dfrac{80}{x^2}$

Para la tapa y el lateral $\to z$ €/cm²

Para la base $\to 1{,}5z$ €/cm²

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

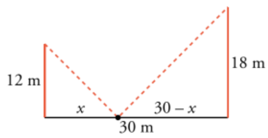
$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \to 5x^3 - 320 = 0 \to x^3 = 64 \to x = 4 \to y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

56 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir: } L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224};$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \to x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0 \to x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

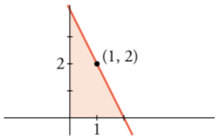
(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

57 **De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.**

Las rectas que pasan por el punto (1, 2) son de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$



Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

- Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 2 - m \to$ Punto $(0, 2 - m)$
- Con el eje $X \to y = 0 \to x = 1 - \frac{2}{m} \to$ Punto $\left(1 - \frac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2 - m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

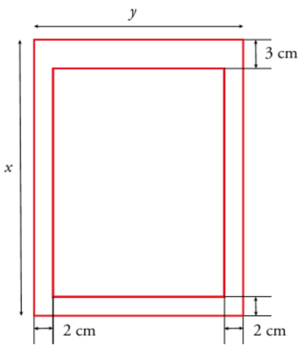
$$A'(m) = 0 \to -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \text{ (no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es: $y = 2 - 2(x - 1)$; es decir: $y = -2x + 4$

58 **Cada una de las páginas de un libro debe tener 600 cm² de superficie, con los márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permiten que la superficie impresa sea lo más grande posible.**



$xy = 600 \to y = \frac{600}{x}$

La superficie imprimible es:

$$A = (x - 5)(y - 4) = xy - 4x - 5y + 20 =$$

$$= 600 - 4x - \frac{3\,000}{x} + 20 = 620 - 4x - \frac{3\,000}{x}$$

$$A' = -4 + \frac{3\,000}{x^2} = 0 \to x = 5\sqrt{30}$$

$$A'' = -\frac{6\,000}{x^3}$$

Si $x = 5\sqrt{30}$, $A'' < 0$, por tanto, en el punto de abscisa $x = 5\sqrt{30}$, la función alcanza un máximo.

Si $x = 5\sqrt{30}$: $y = \frac{600}{5\sqrt{30}} = 4\sqrt{30}$

Por tanto, las dimensiones de la página deben ser $x = 5\sqrt{30}$ cm e $y = 4\sqrt{30}$ cm.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \to x = 2 \text{ (no vale)} \\ 2x - 2 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de la primera derivada en las proximidades de $x = 1$, obtenemos que el punto (1, 0) es un mínimo relativo.

Para resolver

29 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$ en los puntos de ordenada $y = 3$.

Calculamos primero las abscisas de los puntos.

$$x^2 - 9 + 2x - 6 = 0 \to x = 3,\ x = -5$$

Derivamos en forma implícita:

$$2x - 2yy' + 2 = 0 \to x - yy' + 1 = 0 \to y' = \frac{x+1}{y}$$

$$x = -5,\ y = 3,\ y' = \frac{-5+1}{3} = -\frac{4}{3} \to \text{Recta tangente: } y = 3 - \frac{4}{3}(x+5)$$

$$x = 3,\ y = 3,\ y' = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \to \text{Recta tangente: } y = 3 + \frac{4}{3}(x-3)$$

30 Determina los puntos de la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Para que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, la pendiente de la recta tangente debe ser 1.

Derivamos en forma implícita:

$$2(x-3) + 2(y+2)y' = 0 \to y' = \frac{3-x}{y+2}$$

$$y' = 1 \to \frac{3-x}{y+2} = 1 \to 3 - x = y + 2 \to y = -x + 1$$

Hallamos los puntos de la circunferencia que cumplen esta condición:

$$\left.\begin{array}{l} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16 \\ y = -x + 1 \end{array}\right\} \to \text{Soluciones: } \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2\sqrt{2},\ y = -2 + 2\sqrt{2} \\ x = 3 + 2\sqrt{2},\ y = -2 - 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

31 Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = arc\ tg\ \dfrac{x-1}{x+1}$ que es paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$.

$x - 2y + 3 = 0 \to y = \dfrac{x+3}{2}$ tiene pendiente $\dfrac{1}{2}$.

Igualamos la derivada a esta pendiente para que la recta tangente sea paralela a la recta dada.

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y' = \frac{1}{2} \to \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \to x = -1 \text{ (no es un punto válido)},\ x = 1$$

$$x = 1,\ y = 0,\ y' = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2}(x-1)$$

32 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^{x/2}$ en el punto de absicsa $x = e$.**

$ln\, y = \frac{x}{2}\, ln\, x \to \frac{y'}{y} = \frac{1 + ln\, x}{2} \to y' = x^{\frac{x}{2}}\, \frac{1 + ln\, x}{2}$

$x = e,\ y = e^{\frac{e}{2}},\ y' = e^{\frac{e}{2}} \to y = e^{\frac{e}{2}} + e^{\frac{e}{2}}(x - e)$

33 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

  $f'(x) = 2 - 2x \to f'(2) = -2$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

  $g'(x) = 2x - 1 \to g'(2) = 3$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

  $tg\, \alpha = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1 \to \alpha = 45°$

34 **Dada la función $f(x) = |x - 3|(x + 1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y = 6x - 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 3$ porque las derivadas laterales son distintas.

$$f'(x) = 6 \to \begin{cases} -2x + 2 = 6 \to x = -2 \\ 2x - 2 = 6 \to x = 4 \end{cases}$$

$x = -2,\ y = -5$

$x = 4,\ y = 5$

Los puntos buscados son $(-2, -5)$ y $(4, 5)$.

35 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ se pide:**

a) El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (–1, 3) y (2, 0).

b) Las rectas que pasan por el punto (–2, 1) y son tangentes a la curva.

a) La cuerda que une los puntos dados tiene pendiente $m = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = -1$.

$f'(x) = -2x$

$f'(x) = -1 \to -2x = -1 \to x = \frac{1}{2},\ y = \frac{15}{4}$

La solución es el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

b) El punto (–2, 1) no pertenece a la curva. Debemos calcular las tangentes a la curva desde un punto exterior.

Un punto genérico de la curva es de la forma $(a, 4 - a^2)$. La pendiente de la recta que pasa por este punto y el $(-2, 1)$ es $m = \frac{4 - a^2 - 1}{a - (-2)} = \frac{3 - a^2}{a + 2}$.

Así $\dfrac{3-a^2}{a+2} = -2a \;\rightarrow\; 3-a^2 = -2a(a+2) \;\rightarrow\; a=-3,\; a=-1$

Tenemos dos rectas tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} x=-3 \;\rightarrow\; f'(-3)=6 \;\rightarrow\; y=1+6(x+2) \\ x=-1 \;\rightarrow\; f'(-1)=2 \;\rightarrow\; y=1+2(x+2) \end{array}\right\}$$

36 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ con pendiente mínima.**

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -2,\; x = 0$

Buscamos el punto en el que la pendiente $f'(x)$ es mínima. Para ello volvemos a derivar:

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$

En el punto de abscisa $x = -1$, $f'(x)$ tiene un extremo. Si volvemos a derivar, $f''(x) = 6 > 0$, por tanto, vemos que $x = -1$ es efectivamente, la abscisa del punto en el que la pendiente es mínima.

La recta tangente es: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \rightarrow y - 1 = -3(x+1)$

37 **Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$:**

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x.

b) Calcula el valor de x donde se alcanza la máxima pendiente.

a) $m(x) = f'(x) = -\dfrac{2x}{(3+x^2)^2}$

b) $m'(x) = f''(x) = \dfrac{6(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$

$m'(x) = 0 \rightarrow x = 1,\; x = -1$

Veamos si estos valores son máximos o mínimos:

$m''(x) = f'''(x) = -\dfrac{24x(x^2-3)}{(3+x^2)^4}$

$m''(1) = \dfrac{3}{16} > 0 \rightarrow m(x)$ alcanza un mínimo en $x = 1$.

$m''(-1) = -\dfrac{3}{16} < 0 \rightarrow m(x)$ alcanza un máximo en $x = -1$.

38 **Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

La función está definida cuando $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Como el denominador es siempre positivo, debe ser $x^2 - 1 > 0$. Por tanto el dominio de definición es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (este punto no es válido porque no está en el dominio de definición).

La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

39 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \ne f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \ne f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

  $2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \rightarrow f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
	-3		-1		1	

- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

40 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \ne f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \ne f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
	-2		0		2	

- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.

Página 299

41 **Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2 \ln \frac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.**

El dominio de definición es $(0, +\infty)$ por ser a positivo.

$$f'(x) = x + 2x \ln \frac{x}{a}$$

Para que tenga un punto singular en $x = e$ debe ser $f'(e) = 0$

$$e + 2e \cdot \ln \frac{e}{a} = 0 \to e\left(1 + 2\ln \frac{e}{a}\right) = 0 \to 1 + 2(\ln e - \ln a) = 0 \to 1 + 2 - 2\ln a = 0 \to \ln a = \frac{3}{2}$$

$a = e^{3/2}$

42 **Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas. Exigimos la continuidad en $x = 0$ y así será continua en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminado).}$$

Usando la regla de L'Hôpital $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Luego $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.

Por tanto, para que sea continua $c = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

Por tener un máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \to -2a + b = 0 \to b = 2a$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(2) = 2 \to -4a + b = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \to a = -1,\ b = -2$$

43 **a) Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los valores de m, n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

b) ¿Es un máximo o un mínimo?

c) Comprueba si existen otros puntos singulares y representa la función.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas, luego es continua y derivable salvo, quizás, en el punto.

Estudiamos el punto $x = 1$.

Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + px) = -1 + p \\ \lim_{x \to 1^-} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n \end{array}\right\} \to -1 + p = 1 + m + n \to m + n - p = -2$$

Si se cumple la condición anterior la función será continua en $x = 1$ porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \to \begin{cases} f'(1^-) = -2 + p \\ f'(1^+) = 2 + m \end{cases} \to -2 + p = 2 + m \to m - p = -4$$

Si se cumple la condición anterior la función será derivable en $x = 1$ al coincidir las derivadas laterales.

Para que tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \to 1 + p = 0 \to p = -1$.

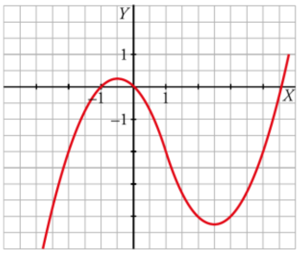
$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ m - p = -4 \\ m + n - p = -2 \end{array}\right\} \to m = -5,\ n = 2,\ p = -1$$

b) $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \to$ El extremo relativo es un máximo.

c) Si existe otro extremo relativo, debe estar en el segundo intervalo.

$f'(x) = 0\ (x > 1) \to 2x - 5 = 0 \to x = \frac{5}{2}$

$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \to$ En $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo.



44 **Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

a) Exigimos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

Veamos la continuidad:

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} a\sqrt{b - x} = a\sqrt{b}$

Cuando $a\sqrt{b} = 2$, la función es continua ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b - x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \to -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Si se cumple la condición anterior será derivable en $x = 0$ ya que coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b} = 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \end{array}\right\} \to a = 2,\ b = 1$$

La función queda así: $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } \ 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) Los puntos singulares solo pueden estar en el primer trozo ya que la derivada no se anula cuando $x \ge 0$.

$f'(x) = 0 \ \to \ 1 - 2e^{-x} = 0 \ \to \ x = ln\ 2 > 0$ (este punto no es válido porque no pertenece al intervalo de definición)

Luego no tiene puntos singulares.

45 **Halla los puntos de la parábola $y = x^2 - 1$ que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$.**

La distancia entre el punto $A\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$ y un punto $P(x, x^2 - 1)$ de la parábola es:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(x) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^4 + 16x + 17}$$

Buscamos los que minimizan la distancia:

$$d'(x) = \frac{4x^3 + 4}{\sqrt{4x^4 + 16x + 17}}$$

$$d'(x) = 0 \ \to \ 4x^3 + 4 = 0 \ \to \ x = -1$$

$d' < 0$ | -1 | $d' > 0$

$x = -1, \ y = 0 \ \to$ En el punto $(-1, 0)$ se alcanza la mínima distancia.

46 **Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x^2 + |x - 2|$ b) $f(x) = 3e^{-2|x|}$

a) $|x - 2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } \ x < 2 \\ x - 2 & \text{si } \ x \ge 2 \end{cases} \ \to \ f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } \ x < 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } \ x \ge 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } \ x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } \ x > 2 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 2$ ya que las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

$$f'(x) = 0 \ \to \ \begin{cases} 2x - 1 = 0 \ \to \ x = \dfrac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \ \to \ x = -\dfrac{1}{2} \ \text{(este punto no vale)} \end{cases}$$

La tabla de los signos de la primera derivada es:

$f' < 0$ | $\frac{1}{2}$ | $f' > 0$ | 2 | $f' > 0$

La función es decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } \ x < 2 \\ 2 & \text{si } \ x > 2 \end{cases} \ \to \ f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

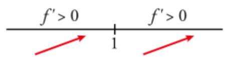
13 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x - 1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \to 3(x - 1)^2 = 0 \to x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de la derivada:



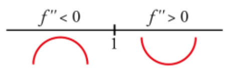
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

• Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x - 1) \to 6(x - 1) = 0 \to x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



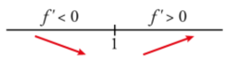
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, 1)$.

b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x - 1)^3 \to 4(x - 1)^3 = 0 \to x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en $(1, 2)$.

• Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

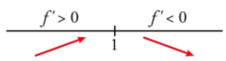
$f''(x) = 12(x - 1)^2 \to f''(x) \ge 0$ para cualquier x.

La función es cóncava en todo su dominio.

c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x - 1)^5 \to -6(x - 1)^5 = 0 \to x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en $(1, 3)$.

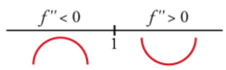
• Como $f''(x) = -30(x - 1)^4 \le 0$, la función es convexa en todo su dominio.

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x - 1)^4 \to 10(x - 1)^4 = 0 \to x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x - 1)^4 \ge 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x - 1)^3$:



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, -3)$.

14 **Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = x \ln x$ **c)** $f(x) = \mathrm{sen}\, x - \cos x$ **d)** $f(x) = e^{-x^2}$

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \to 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3} = 0 \to (x-1)^3 = 8 \to x = 3$

$f''(x) = 1 - \dfrac{24}{(x-1)^4}$

$x = 3,\ y = 4,\ f''(3) > 0 \to$ El punto $(3, 4)$ es un mínimo relativo de la función.

b) $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \to \ln x + 1 = 0 \to x = e^{-1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = e^{-1},\ y = -e^{-1},\ f''(e^{-1}) > 0 \to$ El punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo relativo de la función.

c) $f'(x) = \cos x + \mathrm{sen}\, x$

$f'(x) = 0 \to \cos x + \mathrm{sen}\, x = 0 \to \mathrm{sen}\, x = -\cos x \to \mathrm{tg}\, x = -1$ (ya que $\cos x$ no puede ser 0)

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$f''(x) = -\mathrm{sen}\, x + \cos x$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ y = \mathrm{sen}\, \dfrac{3\pi}{4} - \cos \dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0 \to$ Los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ son máximos relativos de la función.

$x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ y = \mathrm{sen}\, \dfrac{7\pi}{4} - \cos \dfrac{7\pi}{4} = -\sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) > 0 \to$ Los puntos $\left(\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ son mínimos relativos de la función.

d) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \to -2xe^{-x^2} = 0 \to x = 0$

$f''(x) = -2xe^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$x = 0,\ y = 0,\ f''(0) < 0 \to$ El punto $(0, 0)$ es un máximo relativo.

15 Cadena de consecuencias. **[El alumnado puede utilizar este organizador gráfico para representar la sucesión de razonamientos que le han permitido estudiar la funciones].**

Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

Ambas funciones son continuas y derivables salvo quizás en los puntos donde se separan los trozos porque están definidas por intervalos mediante funciones polinómicas.

a) Estudiamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x - 2) = 2 \end{cases} \to \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) \to \text{Es continua también en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \rightarrow \text{Es derivable en } x = 1.$$

Estudiamos el punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 7x - 4) = 14 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x^2 + 3x) = 14 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 2} g(x) = 14 = g(2) \rightarrow \text{Es continua también en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{si } x < 2 \\ 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f'(2^-) = 11 = f'(2^+) \rightarrow \text{Es derivable en } x = 2.$$

b) En el caso de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$ (pertenece al intervalo de definición)

$x = -1,\ y = -2,\ f''(-1) > 0 \rightarrow$ El punto $(-1, -2)$ es un mínimo relativo.

En el caso de $g(x)$:

$$g'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + 7 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{7}{2} & \text{(pertenece al intervalo de definición)} \\ 4x + 3 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{3}{4} & \text{(no vale porque no está en el intervalo de definición)} \end{cases}$$

$x = -\dfrac{7}{2},\ y = -\dfrac{65}{4},\ g''\left(-\dfrac{7}{2}\right) > 0 \rightarrow$ El punto $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{65}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

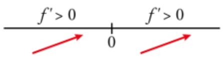
16 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos?**

Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \rightarrow \text{Es una función continua en } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases},\ f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \rightarrow \text{También es derivable en } x = 0.$$

La primera derivada solo se anula cuando $x = 0$.



La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow \text{Es convexa en el intervalo } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty).$$

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque cambia de convexa a cóncava.

Página 298

Funciones dependientes de parámetros

17 **Dada la función $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?**

Como tiene un extremo relativo en $x = 3$ debe cumplirse que $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

$$f'(3) = 0 \rightarrow -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \rightarrow a = -4$$

Por tanto, $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{x^2}$.

$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3}$; $f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$

$x = 3$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f''(3) = -\frac{8}{27} + \frac{36}{81} = \frac{4}{27} > 0 \rightarrow$ El punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ es un mínimo relativo.

18 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \rightarrow 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

19 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -3,\ b = 3,\ c = 1$$

20 **Calcula los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:**

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.

b) Tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0).

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Del apartado a) se deduce que pasa por el punto (0, 0) y que $f'(0) = 1$.

El apartado b) implica que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \rightarrow c = 1$

$f(-1) = 0 \rightarrow 1 - a + b - 1 = 0 \rightarrow -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \rightarrow -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 3,\ b = 3$$

21 **Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).**

Las condiciones del problema implican que:

$f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = -3$$

22 **Las funciones $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ y $g(x) = x - cx^2$ pasan por el punto (1, 0). Determina los coeficientes a, b y c para que tengan la misma recta tangente en dicho punto y calcúlala.**

$f(x)$ pasa por $(1, 0) \to 1 + a + b = 0$ (1)

$g(x)$ pasa por $(1, 0) \to 1 - c = 0$ (2)

$f'(x) = 4x^3 + 2ax + b$

$g'(x) = 1 - 2cx$

Tienen la misma recta tangente en (1, 0):

$f'(1) = g'(1) \to 4 + 2a + b = 1 - 2c$ (3)

El sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3) tiene solución: $a = -4$, $b = 3$, $c = 1$

Calculamos ahora la recta tangente común utilizando, por ejemplo $f(x)$:

$f'(1) = 4 - 8 + 3 = -1$

Por tanto, la recta tangente es: $y - 0 = f'(1)\,(x - 1) \to y = -x + 1$

23 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \quad \to \quad 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 \quad \to \quad 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \ \to \ a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \ \to \ b = 1$

24 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto (2, 1). Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \quad \to \quad -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \quad \to \quad 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \quad \to \quad 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}\right\}$$

25 **Sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \quad \to \quad 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \quad \to \quad 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \quad \to \quad 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} \to f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a \to f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \to 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolvemos: $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \to a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \to b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

27 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.**

¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$f'(x) = 0 \to x^2 - 2x + c = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$

Para que solo haya un punto crítico, ha de ser: $4 - 4c = 0 \to c = 1$

En este caso sería:

$y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$; $f'(x) = \dfrac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \to x = 1$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1 \to f(x)$ es creciente si $x \neq 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

28 **a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables. Solo nos queda estudiar el punto $x = 0$. Veamos la continuidad de la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \to b = 1$$

Para el valor obtenido de b la función es continua porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{e^x} & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = a \end{cases} \to a = -2 \text{ para que sea derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ y $b = 1$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 **a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en $x = 3$.**

b) ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

a) Hallamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$x = 3,\ f(3) = 8,\ f'(3) = 11 \rightarrow y = 8 + 11(x - 3)$

b) Para saber si existe otro punto en el que la recta tangente sea paralela resolvemos:

$f'(x) = 11 \rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 11 \rightarrow x = 3,\ x = -1$

Hay otro punto:

$x = -1,\ f(-1) = -4 \rightarrow y = -4 + 11(x + 1)$ es la recta tangente en este punto.

6 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

Calculamos primero el punto de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$:

$f'(x) = 12x^2 - 4x$

$f''(x) = 24x - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$

Evaluando la derivada segunda a ambos lados de $x = \frac{1}{6}$ observamos que la función pasa de convexa a cóncava. Luego es un punto de inflexión.

$$x = \frac{1}{6},\ f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27},\ f'\left(\frac{1}{6}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación es $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

7 **Halla los puntos de la curva:**

$$y = 3x^2 - 5x + 12$$

en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $(a,\ 3a^2 - 5a + 12)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por el origen es $\frac{3a^2 - 5a + 12 - 0}{a - 0} = \frac{3a^2 - 5a + 12}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $6a - 5$.

$$\frac{3a^2 - 5a + 12}{a} = 6a - 5 \rightarrow 3a^2 - 5a + 12 = 6a^2 - 5a \rightarrow a\ -2,\ a = 2$$

Obtenemos dos puntos de tangencia y dos rectas tangentes:

$x = -2,\ f(-2) = 34,\ f'(-2) = -17 \rightarrow y = -17x$

$x = 2,\ f(2) = 14,\ f'(2) = 7 \rightarrow y = 7x$

8 **Halla los puntos de la curva:**

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $\left(a, \frac{a^2}{4} + 4a - 4\right)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por $(0, -8)$ es $\dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a - 4 - (-8)}{a - 0} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $\frac{a}{2} + 4$.

$$\frac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a} = \frac{a}{2} + 4 \to \frac{a^2}{4} + 4a + 4 = \frac{a^2}{4} + 4a \to a = -4,\ a = 4$$

Obtenemos dos rectas tangentes:

$f'(-4) = 2 \to y = -8 + 2x$

$f'(4) = 6 \to y = -8 + 6x$

9 **Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje** ***X*****:**

a) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$

a) El eje horizontal tiene pendiente 0.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2(2x-3) = 0 \to x = 0,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0,\ f(0) = 0 \to y = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \to y = \frac{9}{4}$$

b) $$y' = \frac{2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x(2 \ln x + 1)}{\ln^2 x}$$

$$y' = 0 \to x(2 \ln x + 1) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)},\ x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}},\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e} \to y = -\frac{2}{e}$$

c) $$y' = \frac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{e^{2x}} = \frac{2 - x^2}{e^{2x}}$$

$$y' = 0 \to 2 - x^2 = 0 \to x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2},\ f(\sqrt{2}) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \to y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$x = -\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} \to y = e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2})$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

10 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \to 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\nearrow$	1	$\searrow$	3	$\nearrow$

Hay un mínimo en (3, 0) y un máximo en (1, 4).

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \to x = 2 \to y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto (2, 2) es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \to x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 2 \to y = -4/3 \end{cases}$$

$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\searrow$	1	$\searrow$	2	$\nearrow$

Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \to x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 4/3 \to y = -(64/81) \end{cases}$$

$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\cup$	0	$\cap$	$\frac{4}{3}$	$\cup$

Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \to x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 3/2 \to y = -27/16 \end{cases}$$

$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$

Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = -1 \end{cases}$$

$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\cup$	0	$\cap$	1	$\cup$

Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en (1, –1).

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2+1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$

$f' < 0$ 0 $f' > 0$

Hay un mínimo en (0, 0).

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

$f' > 0$ 0 $f' < 0$

Hay un máximo en (0, 1).

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$

$f'' > 0$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $f'' < 0$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $f'' > 0$

Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\;\rightarrow\; y = 1$

$f' < 0$ 0 $f' > 0$

Hay un mínimo en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$

$f'' < 0$ -1 $f'' > 0$

Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

11 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

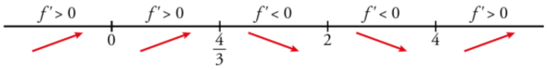
d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x) - (8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \rightarrow x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \dfrac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$.

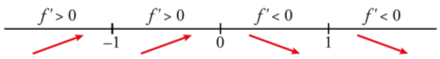
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$, y un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

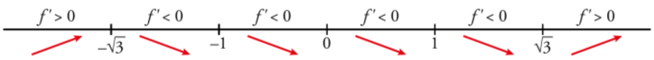
Tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x\ \sqrt{3} \end{cases}$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2-4x+3)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	1	$f' > 0$	2	$f' > 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↗		↘

La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.
es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
tiene un mínimo en $(1, -1)$.
tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2xx - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:

$f' > 0$	0	$f' > 0$
↗		↗

La función es creciente en todo su dominio.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2-6x)}{x^4(x-3x)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3x)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3x)^2}$$

$f'(x) = 0 \to 3x - 6 = 0 \to x = 2$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↘		↘

La función: es creciente en $(0, 2)$.
es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.
tiene un máximo en $(2, -2)$.

12 Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln\,(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 0$

Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$	0	$f'' > 0$
∩		∪

La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:

La función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$.

Tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

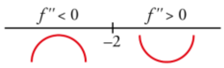
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\, e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\, e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$ ($e^x \neq 0$ pata todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

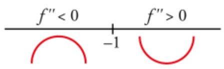
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1\,(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

f) $y = \ln\,(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

3. Recta tangente en un punto de la curva

Hazlo tú

- **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{3}\right)$. Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.**

$y' = -\frac{1}{x^2}$

$x = 3 \to y' = -\frac{1}{9} \to$ La recta es tangente es $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$

La recta corta a los ejes en los puntos:

$x = 0 \to y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(-3) = \frac{2}{3}$

$y = 0 \to 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) \to x = 6$

Si $P\left(3, \frac{1}{3}\right)$; $Q\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $R(6, 0)$.

El punto medio del segmento $\overline{QR}$ es $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{\frac{2}{3}+0}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right) = P$.

Por tanto, P divide al segmento en dos partes iguales.

Página 293

4. Intervalos de crecimiento

Hazlo tú

- **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:**

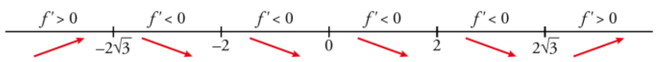
a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ **b)** $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = 0 \to x^4 - 12x^2 = 0 \to x = 2\sqrt{3},\ x = -2\sqrt{3},\ x = 0$

Como el denominador es un cuadrado, el signo de $f'(x)$ depende solo del signo del numerador.



Es creciente en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

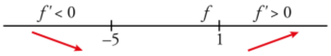
Es decreciente en $(-2\sqrt{3}, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$ y $(2, 2\sqrt{3})$.

b) El dominio de definición es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$

$f'(x) = 0 \to 2x + 4 = 0 \to x = -2$ (que no pertenece al dominio)

No tiene puntos singulares.



Es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -5)$.

Página 294

6. Puntos en los que se anulan f', f'' y f'''

Hazlo tú

- **Estudia si la función $f(x) = 3 - (x+1)^4$ tiene algún máximo, mínimo o punto de inflexión.**

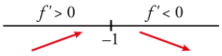
  $f'(x) = -4(x+1)^3$

  $f''(x) = -12(x+1)^2$

  $f'''(x) = -24(x+1)$

  $f'(-1) = f''(-1) = f'''(-1) = 0$

  Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de -1.



  El punto $(-1, 3)$ es un máximo relativo.

7. Parámetros de una función definida a trozos

Hazlo tú

- **Calcula b y d para que la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$ tenga un máximo relativo en el punto $(1, 4)$.**

  La función pasa por el punto $(1, 4) \rightarrow f(1) = 4$

  Tiene un máximo en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0$

  $f(1) = -1 + b + 1 + d = 4 \rightarrow b + d = 4$

  $f'(x) = -3x^2 + 2bx + 1 \rightarrow f'(1) = -3 + 2b + 1 = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} b + d = 4 \\ -3 + 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow b = 1,\ d = 3$$

  Los valores buscados son $b = 1$ y $d = 3$.

Páginas 295

9. Área máxima

Hazlo tú

- **Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.**

  Llamemos r al radio del cilindro y h a la altura.

  El área total es $S = 2\pi r^2 + 2\pi r\text{h}$.

  $$2\pi r^2 + 2\pi r\text{h} = 54 \rightarrow \text{h} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r}$$

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = \pi r^2 \dfrac{27 - \pi r^2}{\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$.

Buscamos las dimensiones del cilindro de volumen máximo.

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$$

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''(r) < 0 \rightarrow \text{En } r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ hay un máximo relativo.}$$

Solo falta calcular la altura del cilindro, que es $h = \dfrac{27 - \pi \cdot 9/\pi}{\pi \cdot 3/\sqrt{\pi}} = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$ cm.

10. Problema de tiempo mínimo

Hazlo tú

- **La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Si la hipotenusa debe medir 6 m, calcula sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.**

Llamemos x, y a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo.

$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

La superficie de la vela es $S = \dfrac{xy}{2}$ ya que los catetos hacen de base y de altura del triángulo rectángulo.

Se obtiene:

$$S(x) = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{36 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}}\right) = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 18 - x^2 = 0 \rightarrow x = 3\sqrt{2},\ x = -3\sqrt{2} \text{ (no vale)}$$

El valor $x = 3\sqrt{2}$ es un máximo como se puede comprobar estudiando el signo de f' a ambos lados del mismo.

El otro cateto del triángulo mide $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$

La vela es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $3\sqrt{2}$ m.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 296

1. Tangente perpendicular a una recta

- **Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 2 = 0$.**

La recta $y = -x + 2$ tiene pendiente -1. Cualquier recta perpendicular a ella tendrá pendiente $-\frac{1}{-1} = 1$. Por tanto, debemos calcular los puntos de la curva en los que la pendiente vale 1.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = 1 \to 12x^2 - 2 = 1 \to x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \to y = \frac{3}{2} + 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y = x$$

2. Intervalos de concavidad y convexidad

- **Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \to 3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución $\to$ No tiene puntos de inflexión y la tabla de los signos de la segunda derivada es:

(el signo de la segunda derivada solo depende del denominador)

La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$. Es convexa en $(-1, 1)$.

3. Máximo y mínimo absoluto

- **Calcular el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo $[-1, 2]$ de la función:**

$$f(x) = ln\,(x^2 + x + 1) - x$$

$f(x) = ln\,(x^2 + x + 1) - x$ está definida en $\mathbb{R}$ ya que el argumento del logaritmo siempre es positivo. Es una función continua y derivable en $[-1, 2]$. Por ser continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza sus extremos absolutos. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los extremos relativos si están en el interior.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x+1}{x^2+x+1} = 1 \;\rightarrow\; 2x+1 = x^2+x+1 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$$

Evaluamos:

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = ln\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) - (-1) = 1$

$x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = ln\, 1 = 0$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = ln\, 3 - 1 \approx 0{,}0986$

$x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = ln\, 7 - 2 \approx -0{,}054$

Alcanza el máximo absoluto en $(1, 1)$ y el mínimo absoluto en $(2, ln\, 7 - 2)$.

4. Teorema del valor medio

- **Dada la función $f(x) = x^{\sqrt{x^2-4x+7}}$, demostrar que existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = 4$.**

Para que la función esté definida debe ser el radicando mayor o igual que 0.

La inecuación $x^2 - 4x + 7 \geq 0$ es cierta en $\mathbb{R}$. Por tanto, el dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ y es continua en $[1, 3]$.

Calculamos la derivada:

$$ln\, f(x) = \sqrt{x^2-4x+7}\; ln\, x \;\rightarrow\; \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+7}}\, ln\, x + \sqrt{x^2-4x+7}\, \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(x-2)\, ln\, x}{\sqrt{x^2-4x+7}} + \frac{\sqrt{x^2-4x+7}}{x} = \frac{x(x-2)\, ln\, x + x^2 - 4x + 7}{x\sqrt{x^2-4x+7}} \;\rightarrow\; f'(x) = x^{\sqrt{x^2-4x+7}}\, \frac{x(x-2)\, ln\, x + x^2 - 4x + 7}{x\sqrt{x^2-4x+7}}$$

Por tanto, la función es derivable en $(1, 3)$.

Por el teorema del valor medio existe un punto $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{9-1}{2} = 4$.

5. Extremos relativos

- **Sea $f(x) = x^2 e^{-ax}$ con $a \neq 0$.**

a) Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

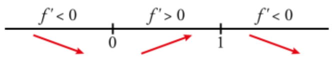
b) Clasificar los extremos relativos cuando $a = 2$.

a) $f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$

$f'(2) = 0 \;\rightarrow\; 4e^{-2a} - 4ae^{-2a} = 0 \;\rightarrow\; e^{-2a}(4 - 4a) = 0 \;\rightarrow\; 4 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 1$ (ya que la exponencial nunca se anula)

b) Para $a = 2$ la derivada es $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$.

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 1,\; x = 0$



$x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 1,\; f(1) = e^{-2} \;\rightarrow\; (1, e^{-2})$ es un máximo relativo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 297

Para practicar

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:**

a) $y = ln\ (tg\ 2x)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{8}$ **b)** $y = \sqrt{sen\ 5x}$ **en** $x = \dfrac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ **en** $x = 2$ **d)** $y = (x^2 + 1)^{sen\ x}$ **en** $x = 0$

a) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{8} \to y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{2(1 + tg^2\ 2x)}{tg\ 2x} \to y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = 4x - \dfrac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{6} \to y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{5\cos 5x}{2\sqrt{sen\ 5x}} \to y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5(-\sqrt{2}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-5\sqrt{6}}{4}$

• Recta tangente: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \to y^2 - 8y + 15 = 0$

$y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \dfrac{8 \pm 2}{4}$ $\begin{cases} y = 5 \to \text{Punto}\ (2, 5) \\ y = 3 \to \text{Punto}\ (2, 3) \end{cases}$

• Pendiente de las rectas:

$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$

$y'(2y - 8) = 2 - 2x \to y' = \dfrac{2 - 2x}{2y - 8} = \dfrac{1 - x}{y - 4}$

$y'(2, 5) = \dfrac{1 - 2}{5 - 4} = -1$

$y'(2, 3) = \dfrac{1 - 2}{3 - 4} = 1$

• Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \to y = -x + 7$

• Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \to y = x + 1$

d) • Ordenada en el punto: $x = 0 \to y = (0 + 1)^{sen\ 0} = 1^0 = 1 \to P(0, 1)$

• Pendiente de la recta tangente:

$y = (x^2 + 1)^{sen\ x} \to ln\ y = sen\ x \cdot ln\ (x^2 + 1) \to$

$\to \dfrac{y'}{y} = cos\ x \cdot ln\ (x^2 + 1) + sen\ x \cdot \dfrac{2x}{x^2 + 1} \to$

$\to y' = \left[cos\ x \cdot ln\ (x^2 + 1) + \dfrac{2x \cdot sen\ x}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{sen\ x}$

$m = [cos\ 0 \cdot ln\ 1 + 0] \cdot 1^0 = (1 \cdot 0 + 0) \cdot 1 = 0$

• Recta tangente: $y = 1 + 0(x - 0) \to y = 1$

2 **Halla las tangentes a la curva** $y = \dfrac{2x}{x-1}$ **paralelas a la recta** $2x + y = 0$**.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \to \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = -2 \to -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \to x^2 - 2x = 0 \to x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = 2 \to \text{Punto}\,(2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en $(0, 0)$: $y = -2x$

Recta tangente en $(2, 4)$: $y = 4 - 2(x-2) \to y = -2x + 8$

3 **Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:**

a) $y = x\,ln\,x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\,2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\,x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\,x + 1$

$y' = 0 \to ln\,x + 1 = 0 \to ln\,x = -1 \to x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \to y = \dfrac{-1}{e}$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = (2x + x^2)e^x$

Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \to 2x + x^2 = 0 \to x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = -2 \to \text{Punto}\,(-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\,cos\,2x$

$$y' = 0 \to 2\,cos\,2x = 0 \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \to x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \to y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \to x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \to y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

4 **Halla el punto de la gráfica de** $y = 2\sqrt{x}$ **en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje** X**. Escribe la ecuación de esa tangente.**

- Si la recta tangente forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\,60° = \sqrt{3}$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

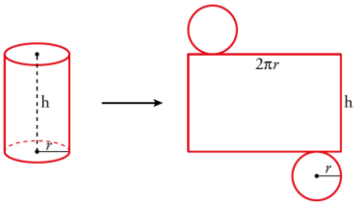
$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \to \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \to 1 = 3x \to x = \frac{1}{3} \to y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

4 **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



Área total $= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h = 6{,}28 \ \to\ h = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Así: *Área total* $= 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right),\ \ r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = \left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \ \to\ -2 + 2r^3 = 0 \ \to\ r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \ \to\ h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

6 ▶ DOS IMPORTANTES TEOREMAS

Página 287

1 **Comprueba que la función $f(x) = sen\ x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

$y = sen\ x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple la hipótesis del teorema de Rolle.

$$\left.\begin{array}{l} y' = cos\ x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array}\right\} \to \text{Cumple la tesis en: } x = \frac{\pi}{2}$$

2 **¿Qué te hace decir eso? [El trabajo con las condiciones para aplicar el teorema de Rolle puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

Calcula b para que la función:

$$f(x) = x^3 - 4x + 3$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?

$f(x)$ es una función polinómica. Por tanto, es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y, en particular, continua en $[0, b]$ y derivable es $(0, b)$.

Por otra parte debe ser:

$$f(0) = f(b) \to 3 = b^3 - 4b + 3 \to b^3 - 4b = 0 \to b = 2,\ b = 0,\ b = -2$$

De los tres resultados anteriores solo es válido $b = 2$ por las condiciones del problema.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \to 3x^2 - 4 = 0 \to x = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como $\frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$, este es el valor al que se refiere la tesis del teorema de Rolle.

3 **Comprueba que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -0,5 \le x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & \text{si } \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-0,5;\ 4]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Será continua en $[-0,5; 4]$ si lo es en el punto $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x + 2) = 4 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(5 - (x - 2)^2\right) = 4 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 4 \to f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Estudiamos su derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -0,5 < x < 1 \\ -2(x - 2) & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases},\ f'(1^-) = 2 = f'(1^+) \to f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ y, por tanto, en el intervalo } (-0,5;\ 4).$$

Finalmente, $f(-0,5) = 1 = f(4)$.

El punto al que se refiere la tesis del teorema de Rolle lo obtenemos de $-2(x - 2) = 0 \to x = 2$.

4 Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [–1, 1] cualquiera que sea el valor de k.

$f(x) = x^3 - 3x + k$ es continua en [–1, 1] y derivable en (–1, 1).

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en [–1, 1], sean c_1 y c_2. Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2), pues $-1 \le c_1, c_2 \le 1$.

Hemos llegado a una contradicción.

Por tanto, $x^3 - 3x + k = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo [–1, 1], cualquiera que sea el valor de k

Página 289

5 Demuestra que $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (2x - 3) = 5 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\ f(4) = 5 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego $f(x)$ es continua en el intervalo [2, 6]. (Para $x \ne 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en (2, 6). Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \to -2x + 10 = 1 \to x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{9}{2}$.

6 Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + bx & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en [–3, 2]. ¿Dónde cumple la tesis? Haz la gráfica.

La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Será continua en [–3, 2] si lo es en el punto $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + a) = a \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x^2 + bx) = 0 \end{array}\right\} \to a = 0 = f(0)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } -3<x<0 \\ -2x+b & \text{si } 0<x<2 \end{cases} \to f'(0^-) = 2,\ f'(0^+) = b \to b = 2$$

Cuando $a = 0$ y $b = 2$ la función es continua en [–3, 2] y derivable en (–3, 2).

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{si } -3\le x<0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0<x\le 2 \end{cases}$$

$$\frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{0-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$2x + 2 = -\frac{3}{5} \to x = -\frac{13}{10}$ resultado un punto válido porque $-3 < -\frac{13}{10} < 0$.

$-2x + 2 = -\frac{3}{5} \to x = \frac{13}{10}$ también es un punto válido porque $0 < \frac{13}{10} < 2$.

7 **Aplica el teorema del valor medio, si es posible, en el intervalo [–2, –1] a la función siguiente:**

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Calcula el valor correspondiente a c y comprueba gráficamente el resultado obtenido.

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en [–2, –1] y derivable en (–2, –1).

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = \frac{6-12}{-1+2} = -6$$

$$f'(x) = 2x - 3 = -6 \to x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{-3}{2}$.

8 **[La decisión sobre si se puede aplicar el teorema del valor medio puede servir para trabajar esta técnica].**

Repite el ejercicio anterior para la función:

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en [–2, –1] y derivable en (–2, –1).

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{g(-1)-g(-2)}{-1-(-2)} = \frac{0-(-9)}{-1+2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \to 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+120}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{3} \begin{cases} x \approx 2,19 \\ x \approx -1,52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \frac{1-\sqrt{31}}{3}$.

7 APLICACIONES TEÓRICAS DEL TEOREMA DEL VALOR DEL MEDIO

Página 291

1 Demuestra que si f es derivable en un entorno de x_0 y $f'(x_0) < 0$, entonces f es decreciente en x_0.

Por las hipótesis, existe un entorno $E = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ en donde f' es negativa.

Sean x_1 y x_2 dos puntos del entorno tales que $x_1 < x_2$. f cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$, por tanto, $\exists c \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0 \rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Es decir, f es decreciente en x_0.

2 Demuestra que si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo relativo en x_0.

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) > 0 \rightarrow f \text{ es creciente a la izquierda de } x_0 \qquad (1)$$

Si $h > 0$, entonces:

$$f'(x_0 + h) < 0 \rightarrow f \text{ es creciente a la derecha de } x_0 \qquad (2)$$

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0, ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 292

1. Recta tangente y recta normal

Hazlo tú

- **Escribe la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la curva $x^y y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

Para hallar la derivada, tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \to y \cdot ln\, x + x \cdot ln\, y = ln\, 1 \to y \cdot ln\, x + x \cdot ln\, y = 0$$

Derivamos:

$$y' \cdot ln\, x + y \cdot \frac{1}{x} + ln\, y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y' \cdot xy \cdot ln\, x + y^2 + xy \cdot ln\, y + x^2 y' = 0$$

$$y'(xy \cdot ln\, x + x^2) = -y^2 - xy \cdot ln\, y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy \cdot ln\, y}{xy \cdot ln\, x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en (1, 1) es:

$$y = 1 - (x - 1); \text{ es decir, } y = -x - 2$$

2. Tangente que pasa por un punto exterior

Hazlo tú

- **Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.**

Los puntos de tangencia están en la curva y son de la forma $(a, a^2 - 2a + 4)$.

La pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia y por el origen de coordenadas es $\frac{a^2 - 2a + 4 - 0}{a - 0}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente será $f'(a) = 2a - 2$.

Por tanto, $\frac{a^2 - 2a + 4}{a} = 2a - 2 \to a^2 - 2a + 4 = 2a^2 - 2a \to a = -2,\ a = 2$.

Hay dos puntos de tangencia que corresponden a dos rectas tangentes:

$$x = -2,\ f(-2) = 12,\ f'(-2) = -6 \to y = 12 - 6(x + 2)$$

$$x = 2,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 2 \to y = 4 + 2(x + 2)$$

10 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Página 277

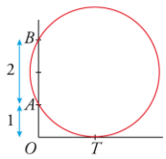
Resuelve

Optimización

- **Una persona se acerca a una estatua de 2 m de altura. Los ojos de la persona están 1 m por debajo de los pies de la escultura. ¿A qué distancia se debe acercar para que el ángulo, φ, bajo el cual ve la estatua sea máximo?**

Hay una hermosa resolución por métodos geométricos. Obsérvala:

Se traza una circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r.

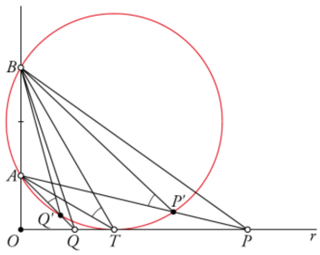


Demuestra que el punto de tangencia, T, es el lugar de la recta r desde el que se ve el segmento AB con ángulo máximo.

Para probar que el ángulo trazado desde el punto de tangencia T es el mayor posible entre todos los trazados desde puntos de la recta usaremos la siguiente propiedad:

«Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales».

Sea P un punto cualquiera situado sobre la recta r (análogamente se razonaría si se encuentra en la posición de Q). Unimos el punto P con B y obtenemos el punto de corte P con la circunferencia. El ángulo $\widehat{APB}$ es menor que el ángulo $\widehat{AP'B}$ pero $\widehat{AP'B} = \widehat{ATB}$ porque los dos son ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco AB. En consecuencia el ángulo trazado desde P es menor que el trazado desde el punto de tangencia T. Así, cualquier ángulo trazado desde puntos de la recta distintos de T es menor que $\widehat{ATB}$, de donde se deduce que este es el mayor ángulo posible.



1 RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Página 279

1 **Halla las rectas tangentes a cada curva que cumplen la condición que se indica:**

a) $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en los puntos de abscisa 0, 1, 3.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

c) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$

paralelas a la recta $y - x = 9$

d) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$

que pasan por el punto $P(2, 0)$.

a) Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$y(0) = 0;\ y(1) = 4;\ y(3) = 150$

- Recta tangente en $(0, 0)$: $y'(0) = 8$

  $y = 8x$

- Recta tangente en $(1, 4)$: $y'(1) = -9$

  $y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$

- Recta tangente en $(3, 150)$: $y'(3) = 11$

  $y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$

b) Obtención de las ordenadas correspondientes:

$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$

$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$

$y^2 + 4y - 21 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 \rightarrow \text{Punto}\ (3, 3) \\ y = -7 \rightarrow \text{Punto}\ (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en estos puntos, derivamos implícitamente:

$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$

$y'(2y + 4) = 2 - 2x$

$y' = \dfrac{2 - 2x}{2y + 4} = \dfrac{1 - x}{y + 2}$

Así: $y'(3, 3) = -\dfrac{2}{5};\ y'(3, -7) = \dfrac{2}{5}$

- Recta tangente en $(3, 3)$: $y = 3 - \dfrac{2}{5}(x - 3) = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{21}{5}$

- Recta tangente en $(3, -7)$: $y = -7 + \dfrac{2}{5}(x - 3) = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{41}{5}$

c) Pendiente de la recta: $y - x = 9 \rightarrow y = x + 9 \rightarrow m = 1$

$y' = x^2 - 2x + 3 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución. Luego no existe ningún punto de la curva en el que las tangentes sean paralelas a la recta dada.

d) Llamamos $T(x, y)$ al punto de tangencia que, por ser de la curva, verifica:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2 = y$$

La pendiente del segmento PT es $\frac{0-y}{2-x} = \frac{-y}{2-x}$, y tiene que coincidir con el valor de la derivada en (x, y). Es decir:

$$\frac{-y}{2-x} = x^2 - 2x + 1 \rightarrow -y = (x^2 - 2x + 1)(2 - x) \rightarrow y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Igualamos con la expresión anterior y resolvemos:

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \rightarrow \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0$ es la única solución real.

Por tanto, el punto de tangencia es $(0, -2)$ y la ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$y = -2 + (0^2 - 2 \cdot (0) + 1)(x - 0) \rightarrow y = x - 2$$

2 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Página 280

1 Demuestra que si una función $y = f(x)$ es decreciente en x_0, entonces:

$$f'(x_0) \le 0$$

Si $f(x)$ es decreciente en x_0 entonces existe un entorno de x_0, $E = (x_0 - a, x_0 + a)$ tal que, si $x \in E$, $x \ne x_0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Por tanto, si $f(x)$ es derivable en x_0, se tiene que $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$.

2 Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

a) ¿Dónde crece?

b) ¿Dónde decrece?

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \rightarrow y' > 0 \rightarrow f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \rightarrow y' < 0 \rightarrow f$ es decreciente en $(-1, 3)$

3 ▸ MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

Página 281

1 **Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.**
Averigua de qué tipo es cada uno de estos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)\big(3(x-2)-2x\big)}{(x-2)^4} = \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \to x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

2 **a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) Haz lo mismo para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

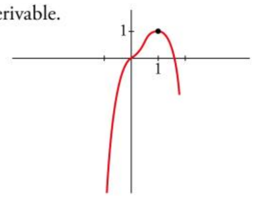
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto}(0, 0) \\ x = 1 \to \text{Punto}(1, 1) \end{cases}\Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo [–1; 1,5], donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En (0, 0) hay un punto de inflexión.
- En (1, 1) hay un máximo relativo.



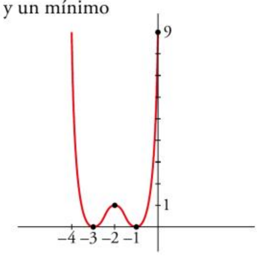
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \to \text{Punto}(-1, 0) \\ x = -2 \to \text{Punto}(-2, 1) \\ x = -3 \to \text{Punto}(-3, 0) \end{cases}\Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo [–4, 0], donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un mínimo relativo en (–3, 0), un máximo relativo en (–2, 1) y un mínimo relativo en (–1, 0).



4 ▸ INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Página 283

1 Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2;\ f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \to 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \to \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \to \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\ f'''(0) \neq 0;\ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2 Estudia la curvatura de la función siguiente:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\ f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \to 6x - 12 = 0 \to x = 2 \to$ Punto $(2, 2)$

$(f'''(x) = 6;\ f'''(2) \neq 0)$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función en convexa es $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función en cóncava es $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

5 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Página 285

1 **Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.**

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

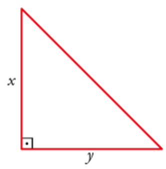
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 5 \;\rightarrow\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\rightarrow\; \text{(no vale, pues } x > 0) \end{array} \right.$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$)

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2 **De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$

$\text{Área} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}, \;\; 0 < x < 10$

Tenemos que maximizar la función:

$f(x) = x + \dfrac{10x - x^2}{2}, \;\; 0 < x < 10$

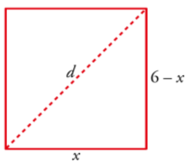
$f'(x) = \dfrac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 5 \;\rightarrow\; y = 10 - 5 = 5$

$\left(f(0) = 0;\; f(10) = 0;\; f(5) = \dfrac{25}{2};\; \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3 **[El ejercicio puede plantear dudas a los compañeros y las compañeras, de forma que el alumnado pueda trabajar la comunicación (dimensión social)].**

Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \;\; 0 < x < 6$

Tenemos que minimizar la función:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \;\; 0 < x < 6$

$f'(x) = \dfrac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \dfrac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \dfrac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6 + 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

28) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & x<0 \\ x^2+ax+b & x \geq 0 \end{cases}$

$Dom f = \mathbb{R}$.

DERIBAGARRIA IZATEKO: JARRAIA IZAN BEHAR DA ETA ALBO DERIBATUAK BARDINAK ETA FINITOAK IZAN BEHAR DIRA

JARRAITASUNA $\left.\begin{array}{l} \exists f(x_0) \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \end{array}\right\}$ $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

1) $f(0) = 0^2 + a\cdot 0 + b = b$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = 1. \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+ax+b = b. \end{cases}$ limitea existitzeko: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\boxed{b=1}$

3) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

DERIBAGARRITASUNA

$$f'(x) = \frac{-1\cdot e^x - (1-x)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & x<0 \\ 2x+a & x>0. \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-2}{e^x} = -2 \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+a = a \end{array}\right\}$ Albo deribatuak berdinak eta finituak izateko $\boxed{a=-2}$

ONDORIOZ $b=1$, $a=-2$ denean $f(x)$ DERIBAGARRIA da $\mathbb{R}$ osoan.

EBAU EZ OHIKOA 2023

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, kalkulatu haren asintotak, eta aurkitu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 0$ abszisa duen puntuan. Egin f funtzioaren grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak $f(0) = 2$ izan dadin, f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = 1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan paraleloak izan daitezen, eta f-k mutur erlatiboa izan dezan $x = -1$ puntuan. Mutur erlatibo hori maximoa ala minimoa da? Aztertu f-k beste mutur erlatiborik al duen eta zehaztu maximoak edo minimoak diren.

EBAU 2023- OHIKOA

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ funtzioa. Kalkulatu haren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta aurkitu haren maximo eta minimo erlatiboak. Kalkulatu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 2$ abszisa duen puntuan.

B3 Ariketa

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ funtzioa gorakorra da $(-\infty, 1)$ tartean eta beherakorra $(1, +\infty)$ tartean. Gainera, f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 2$ abzsiza duen puntuan $y = x + 2$ ekuazioko zuzenarekiko perpendikularra da eta $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ da. Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak.

EBAU 2022- OHIKOA

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$ funtzioa. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f nulua izan dadin $x = 1$ abszisa duen puntuan eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezen.

EBAU 2022- EZ OHIKOA

A3 Ariketa

Kalkulatu $y = 3x - 2$ zuzenarekiko paraleloak diren $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

B3 Ariketa

Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & x \le 1 \text{ bada,} \\ Bx - A, & x > 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

(a) Aurkitu A eta B parametroen balioak f zuzen erreal osoan deribagarria izan dadin.

(b) Egin f-ren adierazpen grafikoa (a) atalean lortutako A eta B parametroen balioekin.

EBAU 2021- OHIKOA

A3 Ariketa

Aztertu $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$ funtzioaren maximoak, minimoak eta gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak. Egin f-ren adierazpen grafikoa.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f-ren grafikoa $(0, 1)$ puntutik pasa dadin eta minimo bat izan dezan $(1, 1)$ puntuan.

b) Lortutako funtzioak beste maximo edo minimorik al du? Horrela bada, aurkitu.

EBAU 2021- EZ OHIKOA

A3 Ariketa

Aztertu $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak $x = 0$ abszisa duen puntuan f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $y = 2x - 1$ izan dadin, eta $x = 1$ abszisa duen puntuan f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea horizontala izan dadin.

$x = 1$ abszisa duen puntuan dagoen muturra zer da, maximoa edo minimoa?

EBAU OHIKOA 2025

(4A) Izan bedi $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$ funtzioa.

(a) **(1 puntu)** Kalkulatu A eta B parametroen balioak f funtzioaren grafikoaren $x = 0$ eta $x = 1$ abzisa duten puntuetatik pasatzen diren zuzen ukitzaileak horizontalak izan daitezen.

(b) **(1,5 puntu)** Aurreko atalean lortutako A eta B balioetarako, aztertu f funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(4B) "MARKOAK" enpresan koadroetarako markoak egiten dituzte. Oraingo honetan 274 koadro laukizuzenetarako markoak eskatu dizkiete. Koadro guztiek dimentsio berdinak eta 0,3m^2-ko azalera dituzte. Marko bakoitzerako bi material mota erabiliko dituzte: atal horizontalak 12€/m kostua duen material batekoak izango dira, eta bertikaletarako 10€/m kostua duen material bat erabiliko dute. Eskaera egin duen enpresak ahalik eta gutxien ordaindu nahi du. Kalkulatu:

(a) **(2 puntu)** zeintzuk izan behar duten koadroetako neurriek ahalik eta gutxien ordaintzeko;

(b) **(0,5 puntu)** zenbatekoa izango den faktura.

EBAU ez OHIKOA 2025

(4A) Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

(a) **(1 puntu)** Aurkitu f funtzioaren asintotak.

(b) **(1 puntu)** Aurkitu f funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(c) **(0,5 puntu)** Kalkulatu f funtzioaren grafikoak $x = 0$ abzisa-puntuan duen zuzen ukitzailea.

(4B) Katilu zilindrikoen fabrikaziorako ikerketa bat egitea eskatu digute. Baldintza gisa, haien edukierak 216π cm^3 izan behar duela ezarri dute. Enpresak fabrikazioa ahalik eta merkeena izatea nahi du.

(a) **(1,5 puntu)** Kalkulatu fabrikaziora bidali beharreko neurrien zehaztapenak helburua lortzeko.

(b) **(1 puntu)** Katiluak kanpoaldetik koloreztatu egingo dira, eta horretarako erabiliko den materialaren kostua 3 €/m^2 da. Kalkulatu katilu bat koloreztatzeko kostua.

EBAU OHIKOA 2024

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren asintotak.

(b) **(1 p)** Kalkulatu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(c) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 0$ abszisa duen puntuan.

(d) **(0,5 p)** Egin f funtzioaren grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena.

B3 Ariketa

Jakina da $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ funtzioak mutur erlatibo bat duela $x = 1/2$ denean eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 1$ abszisa duen puntuan $y = 6x - 2$ dela.

(a) **(1,5 p)** Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f funtzioaren mutur erlatibo guztiak eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

EBAU EZ OHIKOA 2024

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 2$ abszisa duten puntuetan paraleloak dira. Gainera, f-k mutur erlatibo bat dauka $x = 1$ denean, eta $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ da.

(a) **(1,5 p)** Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = -1$ abszisa duen puntuan, $A = -3$, $B = 0$ eta $C = 4$ parametroen balioetarako.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

(a) **(1 p)** Aurkitu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(b) **(1 p)** Aurkitu f-ren mutur erlatiboak, eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

(c) **(0,5 p)** Aurkitu f-ren asintotak.

2018 ko EKAINA

A5 OPTIMIZAZIO BURUKETA

x eta y zenbaki positibo guztien artean, zeinetarako $x+y=10$ den, aurki itzazu horiek non $P=x^2y$ biderkadura MAXIMOA den.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ P=x^2y \end{cases}$$ ← MAXIMIZATU BEHAR DANA.

$y=10-x$

$P=x^2(10-x)$

$$\boxed{P=-x^3+10x^2}$$

- Maximoa aurkitzeko $\boxed{P'(x)=0.}$

$P'(x)=-3x^2+20x$

$-3x^2+20x=0$ $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=20/3 \end{cases}$

$x(-3x+20)=0$

Eskatzen danaren zenbakiak positiboak dirienez ~~x=0~~. ezin da izan.

- Komprobatzen da ea $x_2=\frac{20}{3}$ maximoa dan, bigarren deribatuarekin.

$P''(x)<0$ baldin da eta berez maximoa izango litzateke

$P''(x)=-6x+20$

$P''\left(\frac{20}{3}\right)=-6\,\frac{20}{3}+20=-40+20=-20.<0$

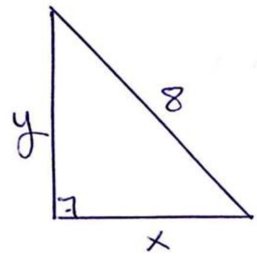
EMAITZA: Beraz $x=\frac{20}{3}$ danean, $y=\frac{10}{3}$ izango da eta P biderkadura MAXIMOA

Scanned with CamScanner

EBAU UZTAILA 2018

$\boxed{A5}$ Optimizazioa.

Eman triangelu angeluzuzen batek izan dezakeen azalera maximoa horren hipotenusaren neurria 8 bada.



$$\begin{cases} x^2+y^2=8^2 \\ A=\dfrac{x\cdot y}{2} \leftarrow \text{maximizatu} \end{cases}$$

$$y=\sqrt{64-x^2}$$

$$A=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}$$

maximizatu behar da funtzioa $\longrightarrow$ $\boxed{A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{1}{2}\cdot(64x^2-x^4)^{1/2}$

→ maximoa aurkitzeko $\boxed{A'(x)=0}$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{128x-4x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{1}{4}\,\frac{4(32x-x^3)}{\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{32x-x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}$$

$$A'(x)=0 \quad \frac{32x-x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}=0 \longrightarrow 32x-x^3=0$$

$$x(32-x^2)=0 \; \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=4\sqrt{2} \\ x_3=-4\sqrt{2} \end{cases}$$

→ $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4\sqrt{2} \end{array}\right\}$ Ez dauka zentzurik

→ Emaitza $x=2$ izan daiteke, $y=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.
eta komprobatu behar da ea maximoa dan $x=4\sqrt{2}$

$$A''(x)=\frac{(32-3x^2)\cdot\sqrt{64x^2-x^4}-(32x-x^3)\cdot\frac{1}{2}\frac{128x-4x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}}{64x^2-x^4}$$

$$A''(2)=\frac{(-64)\cdot\sqrt{32}-0}{1024}<0 \qquad A''(x_0)<0 \text{ MAXIMOA da.}$$

EMAITZA: $\left|\right.$ $y=4\sqrt{2}$ eta $x=4\sqrt{2}$ katetoak dauzkan triangelu angeluzuzena
Azalera 16u

Scanned with CamScanner

EBAU 2025 OHIKOA

(4B) "MARKOAK" enpresan koadroetarako markoak egiten dituzte. Oraingo honetan 274 koadro laukizuzenetarako markoak eskatu dizkiete. Koadro guztiek dimentsio berdinak eta 0,3m^2-ko azalera dituzte. Marko bakoitzerako bi material mota erabiliko dituzte: atal horizontalak 12€/m kostua duen material batekoak izango dira, eta bertikaletarako 10€/m kostua duen material bat erabiliko dute. Eskaera egin duen enpresak ahalik eta gutxien ordaindu nahi du. Kalkulatu:

(a) **(2 puntu)** zeintzuk izan behar duten koadroetako neurriek ahalik eta gutxien ordaintzeko;

(b) **(0,5 puntu)** zenbatekoa izango den faktura.

EBAU 2025 EZ OHIKOA

(4B) Katilu zilindrikoen fabrikaziorako ikerketa bat egitea eskatu digute. Baldintza gisa, haien edukierak 216π cm^3 izan behar duela ezarri dute. Enpresak fabrikazioa ahalik eta merkeena izatea nahi du.

(a) **(1,5 puntu)** Kalkulatu fabrikaziora bidali beharreko neurrien zehaztapenak helburua lortzeko.

(b) **(1 puntu)** Katiluak kanpoaldetik koloreztatu egingo dira, eta horretarako erabiliko den materialaren kostua 3 €/m^2 da. Kalkulatu katilu bat koloreztatzeko kostua.

2015 UZTAILA A3

Horma-irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontaletan eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

2014 UZTAILA B3

Badakigu *A* eta *B* zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura, $A{\cdot}B$, maximoa izan dadin.

2013 EKAINA B3

200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat. Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azaleren baturak minimoa izan behar du.

2013 UZTAILA A3

Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurokotan adierazia) irekia duen *n* denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera:

$$B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24) .$$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.

b) Irabazi maximo horien balioa.

2012 EKAINA B3

Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4.000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.
Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.

2012 UZTAILA B3

Denda batean olioa saltzen da 2 euroan litroa. x litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adieraziak) hauek dira: $0{,}5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu itzazu C-ren balioa eta lortutako etekin maximoa.

2010 UZTAILA A3

Merkatari batek kafea saltzen du 2 euro eta 75 zentimotan kiloa. Merkatariak bi motatako gastuak ditu, merkantziaren garraioa eta herri-ogasunari ordaindu beharreko zerga bat. Saltzen duen kilo bakoitzeko, garraioaren gastua 25 zentimokoa da. Herri-ogasunari ordaindu beharreko euro-kopurua kalkulatzeko, saldutako kilo-kopuruaren karratua zati 1200 egin behar da.
Aurreko datuekin kalkulatu merkatariak saldu behar duen kilo-kopurua irabazia maximoa izan dadin, eta kalkulatu irabazi maximo hori.

DERIBATUEN APLIKAZIOAK: FUNTZIO BATEN KOEFIZIENTEAK

Honelako ariketak ebazteko, enuntziatuek funtzioei buruz emoten dabezan datuak ondo interpretatu eta **hizkuntza matematikora itzuli** behar izaten dira.

1.- Ariketak behin eta berriro irakurri, esaldi bakoitzak eskaintzen dauan informazioa jasotzeko.

2.- Datu bakoitza ekuazio matematiko baten bidez formulatu.

3.-Kalkulatu behar diran **koefiziente beste ekuazio planteatu eta sistema ebatzi**.

4.- Koefizienteak funtzioan ordezkatu eta funtzioa osotu.

ADIBIDEA 1: $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$ **polinomioari buruz ondoko datuak ezagunak diara: bere zuzen ukitzailea $x = 1$ deneko puntuan $y = 7x - 3$ zuzenarekin paraleloa da eta bestalde, polinomioak $x = -1$ deneko puntuan mutur erlatibo bat dauka.**
Aurrekoa ezagututa, aurkitu A eta B parametroaren balioak. Arrazoitu balio horiekin $P(x)$ polinomioak beste mutur erlatiborik daukan ala ez, $x = -1$ deneko puntukoaz gain.

EBAZPENA:

a) Bere zuzen ukitzailea $x = 1$ deneko puntuan $y = 7x + 2$ zuzenarekin paraleloa da esaldiaren esanahia:
x = 1 puntuan funtzioak daukan zuzen ukitzailearen malda eta $y = 7x + 2$ zuzenaren malda bat datoz; hau da, $P'(1) = 7$

b) Polinomioak $x = -1$ deneko puntuan mutur relatibo bat dauka esaldiaren esanahia:
$x = -1$ puntuan zuzen ukitzailea horozontala da, bere malda 0 da; hau da $P'(-1) = 0$

c) $\begin{cases} P'(1) = 7 \\ P'(-1) = 0 \end{cases}$ ekuazioa sistema planteatu eta ebatzi, eta horretarako $P'(x)$ kalkulatu.

$$P'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B = 7 \\ 3 \cdot (-1)^2 + 2A) \cdot (-1) + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 + 2A + B = 7 \\ 3 - 2A + B = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2} \quad \text{eta} \quad A = \frac{7}{4}}$$

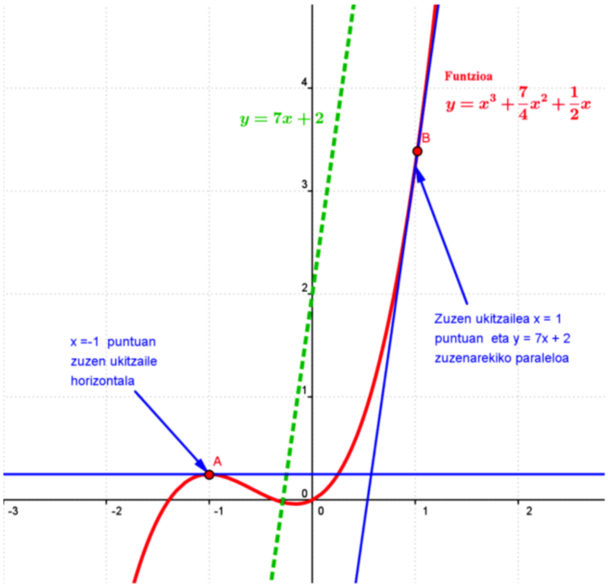
Beste mutur erlatiborik $x = -1$ deneko puntukoaz gain????

Funtzio polinomikoa danez, deribagarria da definizio eremuan, R osoan; beraz mutur erlatiboak kalkulatzeko $P'(x)=0$ eginez lortuko doguz:

$P'(x)=0$ $\quad P'(x)=3x^2+\frac{7}{2}x+\frac{1}{2}=0$ $\quad$ Ebatziz $\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{1}{6} \end{cases}$

Funtzioak bai badauka beste mutur erlatibo bat $\boxed{\text{x = -1/6 puntuan}}$.

Erabili ondoko grafikoa ariketan planteatutakoa frogatzeko.



ADIBIDEA 2: **Izan bedi** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **aldagai errealeko funtzio erreala. Kalkulatu a, b, c eta d jakinik x = -1 puntuan maximo bat daukala, funtzioaren grafikoak OX ardatza x = -2 puntuan ebakitzen dauala, x = 0 puntuan inflexioa daukala eta funtzioarekiko zuzen ukitzailearen malda x = 2 puntuan 9 dala.**

EBAZPENA:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\qquad f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $\qquad f''(x)=3ax+2b$

1.- Ariketak behin eta berriro irakurri, esaldi bakoitzak eskaintzen dauan informazioa jasotzeko:

- Funtzioak x = -1 puntuan maximoa $\Rightarrow$ $f'(-1)=0$
- Funtzioak x = -2 puntuan OX ebaki $\Rightarrow$ $f(-2)=0$
- Funtzioak x = 0 puntuan inflexioa $\Rightarrow$ $f''(x)=0$
- Funtzioak x = 2 puntuan zuzen uk. malda 9 $\Rightarrow$ $f'(2)=9$

2.- Datu bakiotza ekuazio matematiko baten bidez formulatu.

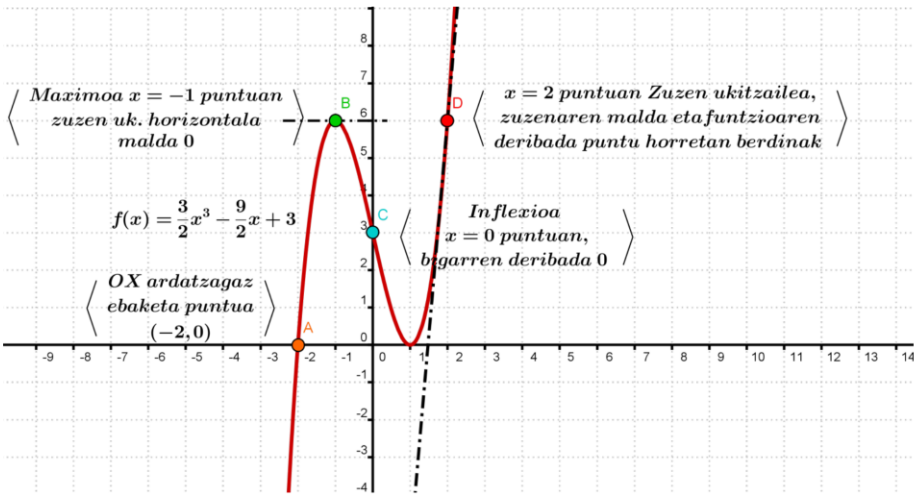
$$\begin{cases} f'(-1)=0 & \rightarrow & 3a(-1)^2+2b(-1)+c=0 & \rightarrow & 3a-2b+c=0 \\ f(-2)=0 & \rightarrow & a(-2)^3+b(-2)^2+c(-2)+d=0 & \rightarrow & -8a+4b-2c+d=0 \\ f''(0)=0 & \rightarrow & 3a(0)+2b=0 & \rightarrow & 2b=0 \\ f'(2)=9 & \rightarrow & 3a(2)^2+2b(2)+c=9 & \rightarrow & 12a+4b+c=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ -8a+4b-2c+d=0 \\ 2b=0 \\ 12a+4b+c=9 \end{cases}$$

Ebatzi eta $a=3/2$; $b=0$; $c=-9/2$; $d=3$ eta funtzioa

honako hau izango da $f(x)=\dfrac{3}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x+3$

Ondorengo grafikoan konprobatu datuak:



ADIBIDEA 3: $y = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ **kurbak x = 1 puntuan ebakitzen du abzisa-ardatza eta inflexio-puntu bat du (3,2)-n.**

a) Kalkulatua a, b eta c koefizienteak.

b) Kalkulatu kurbako zer puntuk daukaten OX ardatzarekiko paraleloa den zuzen ukitzailea.

EBAZPENA:

a) $y = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ $\qquad f'(x) = 3x^2 + 2a\,x + b$ $\qquad f''(x) = 6x + 2a$

1.- Ariketak behin eta berriro irakurri, esaldi bakoitzak eskaintzen dauan informazioa jasotzeko:

- **Kurbak x = 1 puntuan ebaki abzisa-ardatza,** funtzioa (1,0) puntutik pasatu:
- **Inflexio-puntu bat du (3,2)-n.** $\begin{cases} \text{Funtzioa (3,2) puntutik pasatu} \\ \text{Inflexioa dagoenez } f''(3) \text{ puntu horretan nulua} \end{cases}$

2.- Datu bakoitza ekuazio matematikoa baten bidez formulatu:

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 0 \\ f(3) = 2 & \rightarrow & 27 + 9a + 3b + c = 2 \\ f''(3) = 0 & \rightarrow & 18 + 2a = 0 \end{array}\right\} \quad \textit{Ebatzi} \quad \begin{cases} a = -9 \\ b = 24 \\ c = -16 \end{cases}$$

Beraz funtzioa honako hau izango da $y = x^3 - 9\,x^2 + 24\,x - 16$

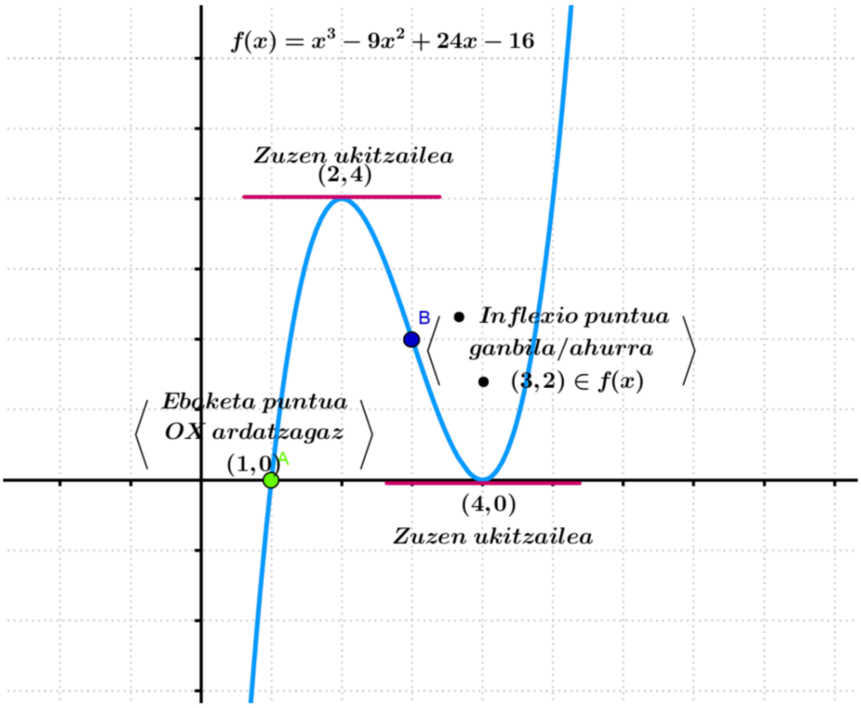
b) Kurbako zer puntuk daukaten OX ardatzarekiko paraleloa den zuzen ukitzailea:

Zuzen ukitzailea OX ardatzarekiko paraleloa bada, bere malda nulua da eta deribatuaren interpretazio geometrikoan oinarrituz, puntu horretan zuzen ukitzailearen malda eta funtzioaren deribatua puntu horretan bat datoz. Beraz,

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Eta puntuak hauek dira (4,0) eta (2,4).

Hurrengo grafikoan interpretatu lortutako emaitzak:


$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$
Zuzen ukitzailea
(2,4)
B
Inflexio puntua
ganbila/ahurra
(3,2) ∈ f(x)
Ebaketa puntua
OX ardatzagaz
(1,0)
A
(4,0)
Zuzen ukitzailea

4b Ariketa ebatziak 9.12

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & x \le 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$

Jarraitasuna $x=0$

$f(0)=0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2-2x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0. \end{array}\right\}$

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Jarraia R osoan.

Deribagarritasuna.

$f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & x<0 \\ 1+\ln x & x>0. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2\cdot 0-2 = -2 \\ f'(0^+) = 1+\ln 0 = 1 \end{array}\right\}$ Ez da deribag. $\underline{\underline{x=0}}$

Hazkundea

Deribatua nulua zein den aztertu: $f'(x)=0$

$\begin{cases} -2x-2=0 \longrightarrow x=-1. & x<0 \\ 1+\ln x = 0 \longrightarrow \ln x = -1 \\ \qquad x = e^{-1} & x>0. \end{cases}$

$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	0	$\searrow$	$1/e$	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	MAX	$-$		$-$	MIN	$+$

G. TARTEA $(-\infty, 1) \cup (1/e, +\infty)$

B. TARTEA $(-1, 0) \cup (0, 1/e)$

MAX $(-1, 1)$

MIN $(1/e, -1/e)$

297. an. $\boxed{2}$ $y=\dfrac{2x}{x-1}$ ren ukitzaileak $2x+y=0$ rekiko paralel.

297.

9.8

- Ukitzaileo eta zuzena PARALELAK badira → MALDA BARDINA

$2x+y=0 \longrightarrow y=-2x \longrightarrow \boxed{m=-2}$

- Malda, deribatua x_0 puntuan da; beraz deribatu kalkulatu

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-2x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

- Maldarekin berdindut:

$$\frac{-2}{(x-1)^2}=-2 \Longrightarrow -2=-2(x-1)^2$$
$$1=(x-1)^2$$
$$\cancel{1}=x^2-2x+\cancel{1}$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$\boxed{x_1=0} \quad \boxed{x_2=2}$$

$x_1=0 \longrightarrow f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=0 \longrightarrow P_1(0,0)$

$x_2=2 \longrightarrow f(2)=\dfrac{2\cdot 2}{2-1}=4 \longrightarrow P_2(2,4)$

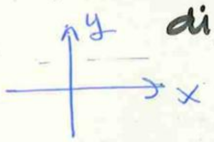
Ukitzaileak

$y_1=0-2(x-0) \longrightarrow y_1=-2x$

$y_2=4-2(x-2) \longrightarrow y_2=-2x+8$

9.9.

297. $\boxed{3}$ kalkulatu x ardatzarekiko ∥ diren zuzen ukitzaileak.



Beraz ukitzaileen malda $\boxed{m=0}$

beraz $f'(x_0)=0$

a) $y = x \cdot \ln x$.

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$m=0 \longrightarrow \ln x + 1 = 0$.

$\ln x = -1$

$e^{-1} = x$.

$f(e^{-1}) = \frac{\ln e^{-1}}{e} = -\frac{1}{e}$.

$\boxed{P\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)}$

Ukitzailea $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = \frac{-1}{e} + 0 \cdot (x - e^{-1})$

$\boxed{y = -1/e}$

b) $y = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$m=0 \quad 2xe^x + x^2 e^x = 0$

$e^x(2x + x^2) = 0$

$e^x \neq 0$

$2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0 \quad \boxed{x_1 = 0} \quad \boxed{x_2 = -2}$

$x_1 = 0$

$f(0) = 0^2 e^0 = 0$

$\boxed{P_1(0,0)}$

$x_2 = -2$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = 4 \cdot e^{-2}$

$\boxed{P_2(-2, 4e^{-2})}$

Ukitzaileak $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y_1 = 0 + 0(x - 0) \longrightarrow \boxed{y_1 = 0}$.

$y_2 = 4e^{-2} + 0 \cdot (x+2) \longrightarrow \boxed{y_2 = 4 \cdot e^{-2}}$

c) $y = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

$m = 0 \longrightarrow \quad 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_1 = 1$

$2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_2 = -1$

$P_1 \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

$P_2 \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

UKITZAILEAK

$y_1 = 1 + 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4} + \pi k\right) \longrightarrow \boxed{y_1 = 1}$

$y_2 = -1 + 0 \left(x - \frac{3\pi}{4} + \pi k\right) \longrightarrow \boxed{y_2 = -1}$

9.11

(4) HAZKUNDE - TARTEAK (ariketa ebatzia)

Aztertu HAZKUNDEA, MAX, MIN

$$f(x) = e^x \cdot (x^2-3x+1)$$

Funtzioa jarraia eta deribagarria da $\mathbb{R}$ bere definizio eremu osoan.

• Hazkundea aztertzeko $f'(x)$: $\begin{cases} f'(x)>0 & \text{GORAK} \\ f'(x)<0 & \text{BEHER..} \end{cases}$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2-3x+1) + e^x(2x-3) =$$

$$f'(x) = e^x (x^2-x-2)$$

• $f'(x)=0$ puntuak bilatzen ditugu.

$$\underbrace{e^x}_{0} \cdot \underbrace{(x^2-x-2)}_{0} = 0. \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2-x-2=0 \\ (x-2)(x+1)=0 \quad \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{cases} \end{cases}$$

$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	2	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	max	$-$	min	$+$

G. TARTEA $(-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

B. TARTEA $(-1,2)$

max $(-1, 5/e)$ $\qquad f(-1)=e^{-1} \cdot 5 \cdot 5/e$

min $(2, -e^2)$ $\qquad f(2)=e^2(-1)$

9,5

297. orr. Zuzen ukitzaileen ekuazioak

1a) $y = \ln(\operatorname{tg} 2x) \qquad x = \pi/8.$

Zuzen ukitzailea $\quad y = y_0 + m(x - x_0)$

edo $\quad y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

• $P(x_0, y_0)$

$x = \pi/8 \rightarrow f(\pi/8) = \ln \underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\cdot 2\right)}_{1} = 0 \longrightarrow \boxed{P\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)}$

• Maldo = Deribatua $x = \pi/8$ danean:

$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot 2\cdot(1 + \operatorname{Tg}^2(2x))$

$f'(\pi/8) = \frac{1}{\underbrace{\operatorname{tg}(\pi/8\cdot 2)}_{1}} \cdot 2\,(1 + \underbrace{\operatorname{tg}^2\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}_{1}) = \boxed{4}$

• Ukitzailea

$P(\pi/8, 0) \longrightarrow y = 0 + 4(x - \pi/8) \longrightarrow \boxed{y = 4x - \frac{\pi}{2}}$

$m = 4.$

b) $y = \sqrt{\sin 5x} \qquad x_0 = \pi/6.$

• $P(x_0 y_0)$ $\quad x_0 = \pi/6$

$f(\pi/6) = \sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\sin 150} = \sqrt{\sin 30} =$

$= 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$\boxed{P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

• Maldo $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 5x}} \cdot \cos(5x)\cdot 5 = \frac{5\cos(5x)}{2\sqrt{\sin(5x)}}$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{\cos(5\pi/6)}{\sqrt{\sin(5\pi/6)}} = \frac{5}{2}\,\frac{\cos 150}{\sqrt{\sin 150}} =$

$= \frac{5(-\cos 30^\circ)}{2\sqrt{\sin 30}} = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{1/2}} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{5\sqrt{6}}{4}}$

Ukitzailea $\quad \boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

c) $x^2+y^2-2x-8y+15=0 \quad x_0=2$ INPLICIT. 9.6

- $P(x_0, y_0)$

$2^2+y^2-2\cdot2-8y+15=0$

$\cancel{4}+y^2-\cancel{4}-8y+15=0$

$y^2-8y+15=0.$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot15}}{2}= \begin{cases} y_1=5 \\ y_2=3. \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} P_1(2,5) \\ P_2(2,3) \end{matrix}}$

- Deribatua

$2x+2yy'-2-8y'=0$

$y'(2y-8)=2-2x$

$y'=\dfrac{2-2x}{2y-8}$

$\boxed{y'=\dfrac{1-x}{y-4}}$

- Malda

$P_1(2,5) \longrightarrow y'=\dfrac{1-2}{5-4}=\boxed{-1}$

$P_2(2,3) \longrightarrow y'=\dfrac{1-2}{3-4}=\boxed{1}$

- ukitzaileak

$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

- $P_1(2,5) \quad m_1=-1$

$y=5-1(x-2)$

$\boxed{y_1=-x+7}$

- $P_2(2,3) \quad m_2=1$

$y=3-1(x-2)$

$\boxed{y_2=-x+5}$

d) $y=(x^2+1)^{\sin x}$ $\qquad x_0=0.$

Zuzen ukitzailea $\qquad y=y_0+m(x-x_0)$

· Puntua (x_0, y_0)

$x_0=0 \longrightarrow y=(0^2+1)^{\sin 0}=1^0=1 \longrightarrow \boxed{P(0,1)}$

· Deribatua.

$y=(x^2+1)^{\sin x}$ Deribatu logaritmikoa.

$\ln y=\ln(x^2+1)^{\sin x}$

$\ln y=\sin x\cdot\ln(x^2+1)$

$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\,\frac{2x}{x^2+1}$

$y'=y\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\cdot\sin x}{x^2+1}\right]$

$y'=(x^2+1)^{\sin x}\cdot\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\,\sin x}{x^2+1}\right]$

- Malda

$P(0,1)\rightarrow y'=(0^2+1)^{\sin 0}\cdot\left[\cos 0\,\cancel{\ln(1)}^{0}+\cancel{\frac{2\cdot 0\cdot\sin 0}{0^2+1}}^{0}\right]$

$y'=0\longrightarrow\boxed{m=0}$

· Ukitzailea.

$P(0,1)$, $m=0$ $\longrightarrow y=1+0(x-0)$

$\boxed{y=1}$

9/1

10. DERIBATUEN APLIKAZIOAK. (x_0 emanda)

279. orr. [1] a) $y = \dfrac{5x^3+7x^2-16x}{x-2}$ $x=0$, $x=1$, $x=3$ puntuetan.

Ukitzailearen ekuazioa: $\boxed{y = y_0 + m(x-x_0)}$

edo $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$

· Ekuazioan ordezkatzeko puntua $P(x_0, y_0)$ eta $f'(x_0)$ behar da:

· Deribatua: $y' = \dfrac{(15x^2+14x-16)(x-2)-(5x^3+7x^2-16x)}{(x-2)^2}$

$$y' = \frac{15x^3-30x^2+14x^2-28x-16x+32-5x^3-7x^2+16x}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{10x^3-23x^2-28x+32}{(x-2)^2}$$

· x_0 bakoitzarentzako y_0 eta $f'(x_0)$ kalkulatu:

* $x=0 \rightarrow f(0)=0 \rightarrow \boxed{P_1(0,0)}$ $\boxed{m = f'(0) = \frac{32}{4} = 8}$

* $x_1=1 \rightarrow f(1) = \dfrac{5\cdot1+7\cdot1-16\cdot1}{1-2} = 4 \rightarrow \boxed{P(1,4)}$

$$f'(1) = \frac{10\cdot1-23-28+32}{(1-2)^2} = \boxed{-9}$$

* $x_2=3 \rightarrow f(3) = \dfrac{5\cdot3^3+7\cdot3^2-16\cdot3}{3-2} = 150 \rightarrow \boxed{P(3,150)}$

$$f'(3) = \frac{10\cdot3^3-23\cdot3^2-28\cdot3+32}{(3-2)^2} = \boxed{11}$$

UKITZAILEAK

$y_1 = 0+8(x-0)$
$y_2 = 4-9(x-1)$
$y_3 = 150+11(x-3)$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= 8x \\ y_2 &= -9x+13 \\ y_3 &= 11x+117 \end{aligned}}$$

279) 1 b) $x^2+y^2-2x+4y-24=0$. (inplizituak) 9.2

$x_0=3$

· Zuzen ukitzailearen ekuazioarako $P(x_0,y_0)$ eta $f'(x_0)=m$ behar da..

· PUNTUA KALKULATZEKO.

$$3^2+y^2-2\cdot 3+4\cdot y-24=0$$
$$9+y^2-6+4y-24=0$$
$$y^2+4y-21=0$$
$$y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-21)}}{2}=\begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-7 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_1(3,3) \\ P_2(3,-7) \end{matrix}}$$

· DERIBATUA (inplizituak)

$$2x+2yy'-2+4y'=0.$$
$$y'(2y+4)=2-2x$$
$$y'=\frac{2-2x}{2y+4} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1-x}{y+2}}$$

· MALDA → DERIBATUA PUNTUAN DA

$$P_1(3,3) \rightarrow y'=\frac{1-3}{3+2}=\boxed{\frac{-2}{5}}$$

$$P_2(3,-7) \rightarrow y'=\frac{1-3}{-7+2}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

· UKITZAILEAK $\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

$$y_1=3+\left(\frac{-2}{5}\right)(x-3) \longrightarrow \boxed{y_1=\frac{-2}{5}x+\frac{21}{5}}$$

$$y_2=-7+\frac{2}{5}(x-3) \longrightarrow \boxed{y_2=\frac{2}{5}x-\frac{41}{5}}$$

c) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$. (M emanda) 9.3.

$y - x = 9$. zuzenarekiko paraleloa.

· Ukitzailea $y-x=9$ zuzenarekiko paraleloa bada, malda bardina izan behar dabe

$$y - x = 9 \longrightarrow y = 9 + x \longrightarrow \boxed{m = 1}$$

· Malda, funtzioaren deribatua puntuan da, beraz; funtzioa deribatuko da, eta $m=1$-ekin bardindu.

$$\boxed{f'(x_0) = m}$$

$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$

$y' = f'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} - 2x + 3$

· Bardintzen da $m=1$.

$x^2 - 2x + 3 = 1$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

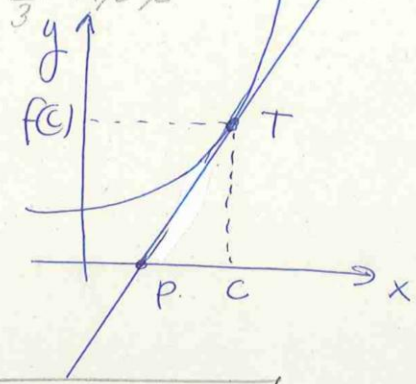
$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\nexists x$, ez dago puntuik non ukitzailea $y-x=9$ zuzenaren paraleloa dan.

9.4

d) $y=\frac{x^3}{3}-x^2+x-2$ P(2,0) (Kanpoko puntua)

$\frac{8}{3}-4+\cancel{2}-\cancel{2}$



· P(2,0) kanpoko puntua da

Bi puntuen arteko malda, T eta P, eta deribatua T puntuan berdinak dira

(1) Malda planteatu m_{TP}

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

P(2,0)

T(c, f(c))

$f(c)=\frac{c^3}{3}-c^2+c-2$

$$\boxed{m=\frac{\frac{c^3}{3}-c^2+c-2-0}{c-2}}$$

(2) Deribatua T puntuan

$f'(x)=\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-2x+1$

$\boxed{f'(c)=c^2-2c+1}$

(3) Berdindu $\boxed{m=f'(c)}$

$$\frac{\frac{c^3}{3}-c^2+c-2}{c-2}=c^2-2c+1$$

$$\frac{c^3}{3}-c^2+\cancel{c}-\cancel{2}=c^3-2c^2+\cancel{c}-2c^2+4c-\cancel{2}$$

$$\frac{c^3}{3}-c^2=c^3-4c^2+4c$$

$$c^3=3c^3-9c^2+12c \longrightarrow$$

$$2c^3-9c^2+12c=0$$

$$c(2c^2-9c+12)=0$$

$$c=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2}=\nexists$$

$\boxed{c=0}$

T puntua $\rightarrow$ T(c, f(c))

$\boxed{T(0,-2)}$

$f'(0)=0^2-0c+1=1 \longrightarrow \boxed{m=1}$

(4) Zuzen ukitzailea

$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

$y=-2+1(x-0)$

$$\boxed{y=x-2}$$

24) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$

Abzisa-ardatza ebaki $x=-1$ $\longrightarrow$ $\boxed{f(-1)=0}$ $(-1,0)$

Inflexio puntua $(2,1)$, $(2,1)$ puntuak funtzioa betetzen dau $\longrightarrow$ $\boxed{f(2)=1}$ eta inflexio puntua izateagatik $\boxed{f''(2)=0}$

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(-1)=0 \longrightarrow & (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ f(2)=1 \longrightarrow & 2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 1 \\ f''(2)=0 \longrightarrow & 6\cdot 2 + 2a = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -1 + a - b + c = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ 12 + 2a = 0 \longrightarrow \boxed{a=-6} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{r} -b + c = 7 \\ 2b + c = 17 \\ \hline -3b = -10 \end{array}$$

$$\boxed{b = 10/3}$$
$$\boxed{c = 31/3}$$

25] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- $f(1) = 1 \rightarrow P(1,1)$ puntua kurban dago
- $f'(1) = 0 \rightarrow$ zuzen ukitzailearen malda $x=1$ denean $m=0$ da. $x=1$ denean PUNTU SINGULARRA dago. (max, min edo IP)
- **f-k ez dauka mutur erlatiborik $x=1$ puntuan**

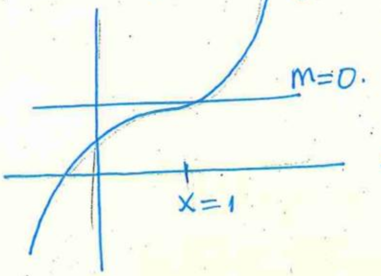
  aurreko baldintzarekin $f'(1)=0$, $x=1$, puntu singularra da, eta ez bada mutur erlatiboa, INFLEXIO PTUA izango da. beraz $\longrightarrow$ $\boxed{f''(1)=0}$

$$\left|\begin{array}{l} f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b. \\ f''(x) = 6x + 2a. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=1 & \Longrightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1)=0 & \Longrightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1)=0 & \Longrightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \boxed{a=-3} \\ \boxed{b=3} \\ \boxed{c=0} \end{array}$$

26] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$

x=1 puntuan ukitzaile horizontaleko inflexio-puntua.



* Zuzen ukitzaile horizontala bada $m=0 \longrightarrow \boxed{f'(1)=0}$

* Eta inflexio puntua bada $\boxed{f''(1)=0.}$

$$\left.\begin{array}{lll} f(x)=x^3+ax^2+bx+5 & & \\ f'(x)=3x^2+2ax+b & \longrightarrow f'(1)=0 & 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0 \\ f''(x)=6x+2a & \longrightarrow f''(1)=0 & 6\cdot 1+2a=0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3+2a+b=0 \longrightarrow \\ 6+2a=0 \longrightarrow \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{l} b=3 \\ a=-3 \end{array}}$$

27] $y=\dfrac{e^x}{x^2+c}$

Puntu kritiko bakarra. (max, min edo Inf. ptu).

Ptu kritikoa izateko $f'(x)=0$.

$$y'=\frac{e^x(x^2+c)-2x\cdot e^x}{x^2+c}=\frac{e^x(x^2-2x+c)}{x^2+c}$$

$$y'=0 \longrightarrow e^x(x^2-2x+c)=0 \quad \begin{cases} e^x\neq 0 \\ x^2-2x+c=0 \end{cases}$$

Ptu bakarra izateko:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot c}}{2} \qquad 4-4c=0 \qquad \boxed{c=1.}$$

Beraz funtzioa eta deribatuak honako dira:

$$y=\frac{e^x}{x^2+1}$$

$$y'=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{x^2+1}$$

Ptu kritikoan $y'=0 \longrightarrow x^2-2x+1=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1.$$

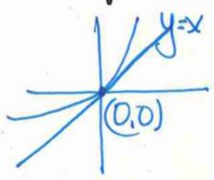
Ptua $(1, f(1))=(1,\frac{e}{2})$.

		1	
$f'(x)$	$f'>0$		$f'>0$
$f(x)$	↗		↗

Inflexio puntua da

20] $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

a) $x=0$ puntua ukitzailea $y=x$ da.



Adierazpen honekin $(0,0)$ puntua kurban dago $\longrightarrow$ $\boxed{f(0)=0}$

Bestaldetik ukitzaileo $y=x$ bada malda 1 da $\longrightarrow$ $\boxed{f'(0)=1}$

b) Mutur erlatibo bat du $(-1,0)$ puntuan.

Mutur erlatiboa izateko $f'(x)=0$, beraz $x=-1$ danean $\boxed{f'(-1)=0}$ izango da. eta $(-1,0)$ kurbaren puntu bat danez $\boxed{f(-1)=0}$ da.

4 baldintzak planteatuz $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f(0)=0 \longrightarrow \quad \cancel{0^4} + \cancel{a0^3} + \cancel{b \cdot 0^2} + \cancel{c \cdot 0} = 0$

$f(-1)=0 \longrightarrow \quad (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = 0.$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0)=1 \longrightarrow \quad \cancel{4 \cdot 0^3} + \cancel{3a \cdot 0^2} + \cancel{2b(0)} + c = 1 \longrightarrow \boxed{c=1}$

$f'(-1)=0 \longrightarrow \quad 4 \cdot (-1)^3 + 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c = 0$

Beraz:

$$\begin{cases} 1 - a + b - c = 0 \\ c = 1 \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 3. \\ b = 3 \end{array}}$$

21| $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

max erlatiboa $(0,4)$

minimo erlatiboa $(2,0)$

Max. $(0,4)$ izateagatik $\boxed{f(0)=4}$ da eta $\boxed{f'(0)=0}$.

Minimoa $(2,0)$ izateagatik $\boxed{f(2)=0}$ da eta $\boxed{f'(2)=0}$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\left.\begin{array}{ll} f(0)=4 \rightarrow & 4 = \cancel{a\cdot 0^3} + \cancel{b\cdot 0^2} + \cancel{c\cdot 0} + d \\ f'(0)=0 \rightarrow & 0 = \cancel{3a0^2} + \cancel{2b\cdot 0} + c \\ f(2)=0 \rightarrow & 0 = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + d \\ f'(2)=0 \rightarrow & 0 = 3a\cdot 2^2 + 2b\cdot 2 + c \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} d = 4 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + \cancel{2c} + d = 0 \\ 12a + 4b + \cancel{c} = 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} 8a + 4b = -4 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \end{array}}$$

22) $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$

$g(x) = x - cx^2$

I) (1,0) puntutik.

$\boxed{f(1)=0}$ $\boxed{g(1)=0}$

II) (1,0) puntuan zuzen ukitzaile berdina.

Zuzen ukitzailearen malda berdina izango da,
berat $m = f'(x_0)$ dugunez $\left.\begin{array}{l} f'(1) = m_1 \\ g'(1) = m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{m_1 = m_2}$ $\boxed{f'(1) = g'(1)}$

$$\begin{cases} f(x) = x^4 + ax^2 + bx \longrightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax + b \\ g(x) = x - cx^2 \longrightarrow g'(x) = 1 - 2cx. \end{cases}$$

Berat:

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 \longrightarrow & 1^4 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 = 0 \longrightarrow & a + b = -1 \\ g(1) = 0 \longrightarrow & 1 - c\cdot 1^2 = 0 \longrightarrow & \boxed{c = 1} \\ f'(1) = g'(1) \rightarrow & 4\cdot 1^3 + 2\cdot a\cdot 1 + b = 1 - \underbrace{2c}_{-2} & \\ & 2a + b = -5 & \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a + b = -5 \\ \hline -a = 4 \end{array} \longrightarrow \boxed{a = -4} \quad \boxed{b = 3} \quad \boxed{c = 1}$$

23) $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$

Inf. puntuak $x=1$ eta $x=1/2$ puntuetan.

Inflexio puntuetan $f''(x)=0$ berat $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{f''(1)=0} \\ \boxed{f''(\frac{1}{2})=0.} \end{array} \right.$

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left. \begin{array}{l} f''(1)=0 \longrightarrow 12 \cdot a \cdot 1^2 + 18 \cdot b \cdot 1 - 6 = 0. \\ f''(\frac{1}{2})=0 \longrightarrow 12 \cdot a (\frac{1}{2})^2 + 18b \cdot \frac{1}{2} - 6 = 0 \end{array} \right\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12a + 18b = 6 \\ 3a + 9b = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{a=-1} \quad \boxed{b=1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12a + 18b = 6 \\ -6a - 18b = -12 \end{array} \right.$$

$$6a = -6$$

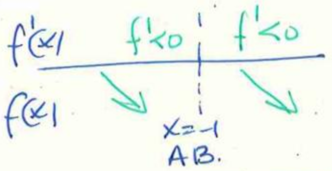
12 e) $y=\frac{2-x}{x+1}$

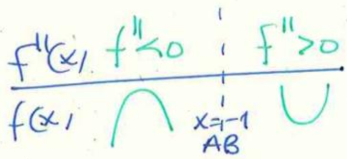
Dom f $= \mathbb{R}-\{-1\}$. AB $x=-1$

$$f'(x)=\frac{-1(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2}=\frac{\cancel{-x}-1-2\cancel{+x}}{(x+1)^2}=\frac{-3}{(x+1)^2}=-3(x+1)^{-2}$$

$\nexists x_0 / f'(x_0)=0 \to$ Ez dago puntu singularrik.

$f''(x)=\frac{6}{(x+1)^3}$ $\quad f''(x)\neq 0$ x puntuentzako.





BT $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

GT ——

AHURT. $(-1,+\infty)$

GANBILT. $(-\infty,-1)$

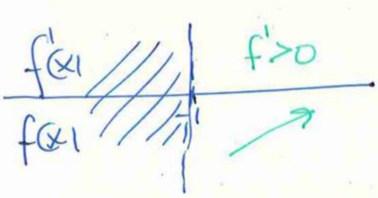
12 f) $y=\ln(x+1)$

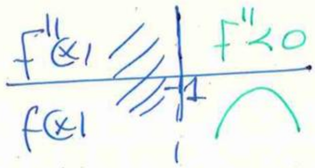
Dom f $=(-1,+\infty)$

AB $x=-1$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}=(x+1)^{-1}$

$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$





GT $(-1,+\infty)$

GANBILA $(-1,+\infty)$

17) $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$

$x=3$ MUTUR ERLATIBOA $\rightarrow$ $\boxed{f'(3) = 0.}$

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}.$$

$$f'(3) = 0 \longrightarrow -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0.$$

$$-3a - 12 = 0 \rightarrow \boxed{a = -4.}$$

Jakiteko maximo ala minimoa den, bigarren deribatua erabiltzen da.

$$f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}.$$

$$f''(3) = -\frac{8}{3^3} + \frac{36}{3^4} = \frac{4}{27} > 0 \ \cup \Rightarrow \text{MINIMOA}$$

Puntua $(3, f(3)) =$ $\boxed{(3, \frac{1}{3}) \text{ MINIMOA DA}}$

18) $f(x) = ax^3 + bx.$

1) (1,1) puntutik pasatzen da, eta:

$$f(1) = 1 \longrightarrow \boxed{a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 1}$$

2.) (1,1) puntuan $3x+y=0$ zuzenarekiko paraleloa da ukitzailea.

$$3x + y = 0 \rightarrow y = -3x \rightarrow m = -3.$$

Malda -3 bada $\rightarrow f'(1) = -3.$

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f'(1) = -3 \longrightarrow \boxed{3a \cdot 1^2 + b = -3.}$$

Sistema ebatzi:

$$-\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+b=-3 \end{cases}$$

$-2a=4$

$\boxed{a=-2}$ $\quad b=1-(-2) \rightarrow \boxed{b=3}$.

$\boxed{19}$ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$

1) $x=2$ puntuan MUTUR ERLATIBOA

Mutur erlatiboa izateko $f'(x_0)=0$, berat:

$f'(x)=3x^2+2ax+b.$

$f'(2)=0 \longrightarrow 3\cdot 2^2+2a\cdot 2+b=0.$

$\boxed{12+4a+b=0.}$

2.) $P(1,2)$ puntuan INFLEXIO PUNTUA

Inflexio puntua izateko: $f''(x_0)=0$. berat.

$f''(x)=6x+2a$

$f'(1)=0 \longrightarrow 6\cdot 1+2a=0 \rightarrow \boxed{a=-3}$.

Berat:

$a=-3 \rightarrow 12+4a+b=0$

$12+4\cdot(-3)+b=0$

$\boxed{b=0.}$

c/ c kalkulatzeko: $P(1,2)$ puntuarekin.:

$f(1)=2.$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+c$

$f(1)=1^3-3+c=2$

$\boxed{c=4}$

max erl. $x = 4/3 \longrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8 - \cancel{3}(4/\cancel{3})}{4/3 \cdot (4/3 - 2)} = \frac{4}{-8/9} = 9/2$

MIN $x = 4 \longrightarrow f(4) = \frac{8-12}{4(4-2)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}.$

KURBADURA

$$f''(x) = \frac{(6x-16)(x^2-2x)^2 - 2(x^2-2x)(2x-2)(3x^2-16x+16)}{(x^2-2x)^4}$$

$$= \frac{(6x-16)(x^2-2x) - (4x-4)(3x^2-16x+16)}{(x^2-2x)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - \cancel{12x^2} - 16x^2 + 32x - [12x^3 - 64x^2 + 64x - \cancel{12x^2} + 64x - 64]}{(\quad)^3} =$$

$$= \frac{-6x^3 + 48x^2 - 96x + 64}{x^3(x-2)^3}$$

11d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}.$

$Dom f = \mathbb{R} - \{2\}$
AB $x = 2$.

HAZKUNDEA $f'(x) = \dfrac{(4x-3)(2-x)-(2x^2-3x)(-1)}{(2-x)^2} =$

$= \dfrac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \boxed{\dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}}$

$f'(x)=0 \longrightarrow \dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}=0$ $\quad x^2-4x+3=0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

PM sing.

$f'(x)$	$f'<0$	1	$f'>0$	2	$f'>0$	3	$f'<0$
$f(x)$	↘	MIN	↗	AB	↗	MAX	↘

min $f(1) = -1$
max $f(3) = -9$.

KURBADURA

$f''(x) = \dfrac{(-4x+8)(2-x)^2-(-2x^2+8x-6)2(2-x)(-1)}{(2-x)^4} =$

$= \dfrac{\cancel{(2-x)}\left[(-4x+8)(2-x)+(-2x^2+8x-6)\cdot 2\right]}{(2-x)^{\cancel{4}\,3}} =$

$= \dfrac{\cancel{-8x}+\cancel{4x^2}+16-\cancel{8x}-\cancel{4x^2}+\cancel{16x}+12}{(2-x)^3} = \dfrac{4}{(2-x)^3}$

$f''(x)=0 \longrightarrow \dfrac{4}{(2-x)^3} \neq 0.$

$f''(x)$	$f''>0$	2	$f''<0$
$f(x)$	∪	AB	∩

GT $(1,2) \cup (2,3)$
BT $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$
MAX ERL $(3,-9)$
MIN ERL $(1,-1)$
AHURRA $(-\infty,2)$
GANBILA $(2,+\infty)$

297/ <u>11b</u> $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ Dom f $=\mathbb{R}-\{\pm1\}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-2x-\cancel{2x^3}-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0\longrightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0\longrightarrow \boxed{x=0}$$ Pto sing.

$f'(x)$	$+$	-1	$+$	0	$-$	1	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	1	$\searrow$

$x=0\longrightarrow f(0)=\dfrac{0^2+1}{0^2-1}=-1$

MAX. $(0,-1)$.

$$f''(x)=\frac{-4(x^2-1)^2-(-4x)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-4(x^2-1)^2+16x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{\cancel{(x^2-1)}\left[-4(x^2-1)+16x^2\right]}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)=0$ $\dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}=0$ $12x^2+4=0\longrightarrow x^2=\dfrac{-4}{12}$ $\nexists$

$f''(x)$	$f''>0$ $+$	-1	$f''<0$ $-$	1	$f''>0$ $+$
$f(x)$	$\cup$	AB	$\cap$	AB	$\cup$

G.T $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

BT $(0,1)\cup(1,+\infty)$

MAX $(0,-1)$

AHURNA $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

SANB. $(-1,1)$

Ahurt. ganb. H. eta inflex. puntuak

12 b) $y = x^4 - 6x^2$

Def. $Dom f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 - 12x \rightarrow 4x^3 - 12x = 0 \rightarrow 4x(x^2-3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

$f''(x) = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12(x^2-1) = 0$
$\rightarrow x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$f'(x)$	$-$	$-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$	$\sqrt{3}$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f''(x)$	$f''>0$	-1	$f''<0$	1	$f''>0$
$f(x)$	$\cup$	INF PUNT $(-1,-5)$	$\cap$	INF PUNT $(1,-5)$	$\cup$

d) $y = x \cdot e^x$ $\quad Dom f = \mathbb{R}$

$\rightarrow f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$

$f'(x) = 0 \quad 0 = e^x(1+x) < \begin{matrix} e^x \neq 0 \\ \boxed{x=-1} \end{matrix}$ Pu sing.

$\rightarrow f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$

$f''(x) = 0 \quad 0 = e^x(2+x) < \begin{matrix} e^x \neq 0 \\ \boxed{x=-2} \end{matrix}$

$f'(x)$	$f'<0$	-1	$f'>0$
$f(x)$	$\searrow$	MIN $(-1, \frac{-1}{e})$	$\nearrow$

$f''(x)$	$f''<0$	-2	$f''>0$
$f(x)$	$\cap$	$(-2, \frac{-2}{e^2})$	$\cup$

GT $(-1, +\infty)$
BT $(-\infty, -1)$
AHURRA $(-2, +\infty)$
GANBILA $(-\infty, -2)$
INF PUNTUA $(-2, \frac{-2}{e^2})$
MIN $(-1, -1/e)$

297/10a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ $Dom f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$f'(x)$	$f' > 0$	1	$f' < 0$	3	$f' > 0$
$f(x)$	↗	MAX $(1,4)$	↘	MIN $(3,0)$	↗

$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$.

$f(1) = 1 - 6 \cdot 1 + 9 = 4$.

KURBADURA

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \longrightarrow 6x - 12 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2}$

$f''(x)$	$f'' < 0$	2	$f'' > 0$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

$f'''(x) = 6$. $f''(2) = 0 \longrightarrow x = 2$ INF PUNTUA

GORAK. TARTEA $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

BEHER TARTEA $(1, 3)$

MAX ERLAT. $(1, 4)$

MIN ERLAT. $(3, 0)$

AHURTASUN TARTEA $(2, +\infty)$

GANBILTASUN TARTEA $(-\infty, 2)$

10 c/ $y = x^4 - 2x^3$

Domf $= \mathbb{R}$ Jarraia eta deribagarria.

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$4x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2(4x-6) = 0 < \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3/2 \end{matrix}$

		0		1		3/2	
$f(x) = x^4 - 2x^3$	↘		↘			MIN $(3/2, -27/16)$	↗
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$	$f'(-1) < 0$ −		$f'(1) < 0$ −				$f'(2) > 0$ +
$f''(x) = 12x^2 - 12x$	$f''(-1) > 0$ + ∪	$(0,0)$ INF. PUNT	∩ −	$(1,-1)$ INF P.	+ ∪		

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

$12x^2 - 12x = 0 \rightarrow 12x(x-1) = 0 < \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$

G.T $(3/2, +\infty)$ MIN $(3/2, -27/16)$

B.T $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2)$ INF. PUNTUA $(0,0)$ eta $(1,-1)$

AHURT $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

GANB. $(0,1)$

d/ $y = x^4 + 2x^2$ Domf $= \mathbb{R}$ Jarraia eta deribagarria.

$f'(x) = 4x^3 + 4x$ $\quad 4x(x^2+1) = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

$f''(x) = 12x^2 + 4$ $\quad 4(3x^2+1) = 0$

		0	
$f(x) = x^4 + 2x^2$	↘	MIN $(0,0)$	↗
$f'(x) = 4x^3 + 4x$	$f'(-1) = -8$ −		$f'(1) = 8$ +
$f''(x) = 12x^2 + 4$		+ ∪	

GT $(0, +\infty)$ Ah. $(-\infty, +\infty)$

BT $(-\infty, 0)$ MIN $(0,0)$.

f/ $y = e^x(x-1)$

$Dom f = \mathbb{R}$ Jarraia eta deribagarria

$f'(x) = e^x(x-1) + e^x(\cancel{x-1+1})$

$f'(x) = e^x \cdot x$

$e^x \cdot x = 0$ < $e^x \neq 0$; $\boxed{x=0}$

MIN$(0,-1)$

$f(x) = e^x(x-1)$

$f'(-1) = -$ $-$; 0 ; $f'(1) > 0$ $+$

$f'(x) = e^x \cdot x$

-1

$f''(-2) < 0$ $-$ $\frown$; INF PUN $(-1, -2e^{-1})$; $f''(0) > 1$ $+$ $\smile$

$f''(x) = e^x(x+1)$

$f''(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$ < $e^x \neq 0$; $x = -1$

$f'''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$

$f'''(-1) = e^{-1}(-1+2) = e^{-1} \neq 0$

GT $(0, +\infty)$
BT $(-\infty, 0)$
Ahurt $(-1, +\infty)$
Ganbil $(-\infty, -1)$
MIN $(0, -1)$
Inflexio Puntu $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$

297.or) 10f) $y = e^x \cdot (x-1)$

$\text{Domf} = \mathbb{R}$.

<u>HAZKUNDEA</u>: $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x \cdot x$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 0 = \underbrace{e^x}_{0} \cdot \underbrace{x}_{0}$ $\begin{cases} e^x \neq 0 \\ \boxed{x=0} \text{ PN sing.} \end{cases}$

$f'(x)$	$f'<0$	0	$f'>0$
$f(x)$	↘		↗

MIN. $f(0) = e^0(0-1) = -1$
$(0,-1)$

<u>KURBADURA</u>: $f''(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$

$f''(x) = 0 \longrightarrow 0 = e^x \cdot (x+1)$ $\begin{cases} e^x \neq 0 \\ x+1 = 0 \longrightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$

$f''(x)$	$f''<0$	-1	$f''>0$
$f(x)$	∩		∪

IP $x=-1$ $f(-1) = e^{-1}(-1-1) = -2/e$

GORAKORRA $(0,+\infty)$	AHURRA $(-1,+\infty)$
BEHERAK. $(-\infty,0)$	GANBILA $(-\infty,-1)$
MINIMO $(0,-1)$	IP $(-1,-2/e)$

11a) $y = \dfrac{8-3x}{\underbrace{x(x-2)}_{x^2-2x}}$ $\text{Domf} = \mathbb{R} - \{0,2\}$

$f'(x) = \dfrac{-3(x^2-2x) - (8-3x)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{-3x^2 \cancel{+6x} - (16x - 16 - 6x^2 \cancel{+6x})}{(x^2-2x)^2}$

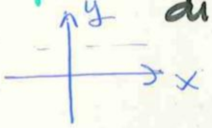
$= \dfrac{3x^2 - 16x + 16}{(x^2-2x)^2}$ $f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0$

$x = \dfrac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/3 \end{cases}$

$f'(x)$	$f'>0$	0	$f'>0$	4/3	$f'<0$	2	$f'<0$	4	$f'>0$
$f(x)$	↗		↗	MAX.	↘		↘	MIN	↗

max $(4/3, 9/2)$
min $(4, -1/2)$

29/ $\boxed{3}$ kalkulatu x ardatzarekiko $\parallel$ diren zuzen ukitzaileak.



Beraz ukitzaileen malda $\boxed{m=0}$

beraz $f'(x_0)=0$

a) $y = x \cdot \ln x$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

$m=0 \longrightarrow \ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$e^{-1} = x$

$f(e^{-1}) = \frac{\ln e^{-1}}{e} = -\frac{1}{e}$

$\boxed{P\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)}$

Ukitzailea $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = \frac{-1}{e} + 0 \cdot (x - e^{-1})$

$\boxed{y = -1/e}$

b) $y = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$m=0 \quad 2xe^x + x^2 \cdot e^x = 0$

$e^x(2x + x^2) = 0$

$e^x \neq 0$

$2x + x^2 = 0$

$x(2+x) = 0$ $\boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = -2}$

$x_1 = 0$

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$

$\boxed{P_1(0,0)}$

$x_2 = -2$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = 4 \cdot e^{-2}$

$\boxed{P_2(-2, 4e^{-2})}$

Ukitzaileak $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y_1 = 0 + 0(x - 0) \longrightarrow \boxed{y_1 = 0}$

$y_2 = 4e^{-2} + 0 \cdot (x+2) \longrightarrow \boxed{y_2 = 4 \cdot e^{-2}}$

~~4.10~~ 12

c) $y = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

$m = 0 \longrightarrow 2\cos 2x = 0$

$\cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_1 = 1$

$2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \longrightarrow x_2 = \frac{3\pi}{4} + \pi k \longrightarrow y_2 = -1$

$P_1 \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, 1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

$P_2 \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right) \quad k \in \mathbb{R}$

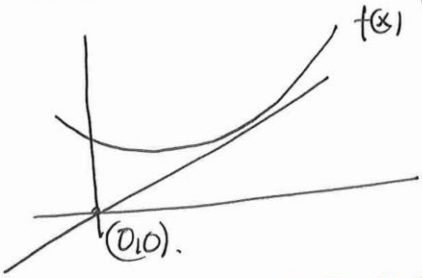
UKITZAILEAK

$y_1 = 1 + 0\cdot\left(x - \overset{45}{\frac{\pi}{4}} + \pi k\right) \longrightarrow \boxed{y_1 = 1}$

$y_2 = -1 + 0\left(x - \underset{\frac{270}{2}}{\frac{3\pi}{4}} + \pi k\right) \longrightarrow \boxed{y_2 = -1}$

297/7) $y = 3x^2 - 5x + 12$.

ukitzailea. koordenatu jatorritik. $\rightarrow (0,0)$.



Zuzen ukitzailea kalkulatzeko $P(0,0)$ eta malda behar dira

$$y = \underset{f(x)}{\underset{\downarrow}{y_0}} + \underset{f'(x_0)}{\underset{\downarrow}{m}}(x - x_0)$$

· Malda kalkulatzeko $\boxed{m = f'(x_0)}$

$f'(x) = 6x - 5$

$f'(0) = -5 \longrightarrow m = -5$

· Beraz ukitzailea:

$P(0,0)$
$m = -5$ $\longrightarrow$ $y = 0 + (-5)\cdot(x - 0)$

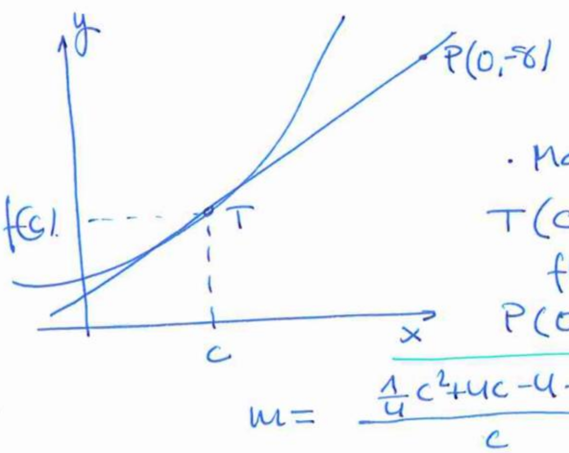
$\boxed{y = -5x}$

297/8). $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$.

Zer puntutako ukitzaileak igarotzen ~~dabe~~ dira $(0,-8)$tik.

$(0,-8)$ puntua KANPOKO PUNTUA da $\cancel{f(-8) = \frac{1}{4}(-8)^2 + 4(-8) - 4 \neq}$

$f(0) = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + 4\cdot 0 - 4 = -4 \neq -8$ dalako.



Zuzen ukitzailea kalkulatzeko $\boxed{m = f'(c)}$

· Malda m_{PT}

$T(c, f(c)) = T(c, \frac{1}{4}c^2 + 4c - 4)$

$f(c) = \frac{1}{4}c^2 + 4c - 4$

$P(0,-8)$

$$\boxed{m = \frac{\frac{1}{4}c^2 + 4c - 4 - (-8)}{c}}$$

• Lehenengo deribatua.

$f'(c) \to f'(x) = \frac{2}{4}x + 4 \to f'(c) = \frac{1}{2}c + 4$

• Planteatuz $m = f'(c)$

$$\frac{\frac{1}{4}c^2 + 4c + 4}{c} = \frac{1}{2}c + 4$$

$$\frac{1}{4}c^2 + 4c + 4 = c\left(\frac{1}{2}c + 4\right)$$

$$\frac{c^2}{4} + \underline{4c} + 4 = \frac{c^2}{2} + 4c$$

$$c^2 + \cancel{16c} + 16 = 2c^2 + \cancel{16c}$$

$$-c^2 = -16$$

$$\boxed{c = \pm 4}$$

• Bi zuzen ukitzaile:

$c_1 = 4 \to f(4) = \frac{4^2}{4} + 4 \cdot 4 - 4 = \cancel{4} + 16 - \cancel{4} = 16$

$P(4, 16)$

$m = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 6$

$y_1 = 16 + 6(x - 4) \to \boxed{y_1 = 6x - 8}$

$c_2 = -4 \to f(-4) = \frac{1}{4}(-4)^2 + 4(-4) - 4 = \cancel{4} - 16 - \cancel{4} = -16$

$P(-4, -16)$

$m = \frac{1}{2}(-4) + 4 = 2$

$y_2 = -16 + 2(x - (-4))$

$\to \boxed{y_2 = 2x - 8}$

c) $x^2+y^2-2x-8y+15=0 \quad x_0=2$ INPLIZIT. 8

• $P(x_0, y_0)$

$2^2+y^2-2\cdot 2-8y+15=0$

$\cancel{4}+y^2-\cancel{4}-8y+15=0$

$y^2-8y+15=0.$

$y=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2} = \begin{cases} y_1=5 \\ y_2=3. \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} P_1(2,5) \\ P_2(2,3) \end{matrix}}$

• Deribatuo

$2x+2yy'-2-8y'=0$

$y'(2y-8)=2-2x$

$y'=\dfrac{2-2x}{2y-8}$

$\boxed{y'=\dfrac{1-x}{y-4}}$

• Haldok

$P_1(2,5) \longrightarrow y'=\dfrac{1-2}{5-4}=\boxed{-1}$

$P_2(2,3) \longrightarrow y'=\dfrac{1-2}{3-4}=\boxed{1}$

• ukitzaileak

$\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

• $P_1(2,5) \quad m_1=-1$

$y=5-1(x-2)$

$\boxed{y_1=-x+7}$

• $P_2(2,3) \quad m_2=1$

$y=3-1(x-2)$

$\boxed{y_2=-x+5}$

9

d) $y=(x^2+1)^{\sin x}$ $\quad x_0=0.$

Zuzen ukitzailea $\quad y=y_0+m(x-x_0)$

· Puntua (x_0, y_0)

$x_0=0 \longrightarrow y=(0^2+1)^{\sin 0}=1^0=1 \longrightarrow \boxed{P(0,1)}$

· Deribatua

$y=(x^2+1)^{\sin x}$ Deribatu logaritm.

$\ln y=\ln(x^2+1)^{\sin x}$

$\ln y=\sin x\cdot\ln(x^2+1)$

$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\sin x\,\frac{2x}{x^2+1}$

$y'=y\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\cdot\sin x}{x^2+1}\right]$

$y'=(x^2+1)^{\sin x}\cdot\left[\cos x\cdot\ln(x^2+1)+\frac{2x\,\sin x}{x^2+1}\right]$

· Malda

$P(0,1)\rightarrow \quad y'=(0^2+1)^{\sin 0}\cdot\left[\cos 0\,\cancel{\ln(1)}^{0}+\cancel{\frac{2\cdot 0\cdot\sin 0}{0^2+1}}^{0}\right]$

$y'=0 \longrightarrow \boxed{m=0}$

· Ukitzailea

$P(0,1)$, $m=0 \longrightarrow y=1+0(x-0)$

$\boxed{y=1}$

29 orr. $\boxed{2}$ $y = \frac{2x}{x-1}$ ren ukitzaileak $2x+y=0$ rekiko parel. 10

- Ukitzaileo eta zuzena PARALELAK badira → MALDA BARDINA

$2x+y=0 \longrightarrow y=-2x \longrightarrow \boxed{m=-2}$

- Malda, deribatua x_0 puntuan da. beraz deribatu kalkulatu

$$f'(x) = \frac{2(x-1)-2x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

- Maldarekin berdindut:

$$\frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Longrightarrow -2=-2(x-1)^2$$

$$1=(x-1)^2$$

$$\cancel{1}=x^2-2x+\cancel{1}$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$\boxed{x_1=0}$ $\boxed{x_2=2}$

$x_1=0 \longrightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-1}=0 \longrightarrow P_1(0,0)$

$x_2=2 \longrightarrow f(2)=\frac{2\cdot 2}{2-1}=4 \longrightarrow P_2(2,4)$

Ukitzaileak

$y_1 = 0-2(x-0) \longrightarrow \boxed{y_1=-2x}$

$y_2 = 4-2(x-2) \longrightarrow \boxed{y_2=-2x+8}$

288) 4 **HAZKUNDE - TARTEAK** (ariketa ebatzia) 9.5

Aztertu HAZKUNDEA, MAX, MIN

$$f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

Funtzioa jarraia eta deribagarria da $\mathbb{R}$ bere definizio eremu osoan.

- Hazkundea aztertzeko $f'(x)$: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{GORAK} \\ f'(x) < 0 & \text{BEHERA..} \end{cases}$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + e^x (2x - 3) =$$
$$f'(x) = e^x (x^2 - x - 2)$$

- $f'(x) = 0$ puntuak bilatzen ditugu.

$$\underbrace{e^x}_{0} \cdot \underbrace{(x^2 - x - 2)}_{0} = 0 \quad \begin{cases} e^x \neq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

		-1		2	
$f(x)$	↗		↘		↗
$f'(x)$	+	max	−	min	+

G.TARTEA $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

B.TARTEA $(-1, 2)$

max $(-1, 5/e)$ $\qquad f(-1) = e^{-1} \cdot 5 \cdot 5/e$

min $(2, -e^2)$ $\qquad f(2) = e^2 (-1)$

288 4b Ariketa ebatziak

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2-2x & x \le 0 \\ x\ln x & x > 0 \end{cases}$

Jarraitutasuna $x=0$

$f(0)=0$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (-x^2-2x)=0 \\ \lim_{x\to 0^+} (x\ln x)=0. \end{array}\right\}$

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

Jarraitu R osoan.

Deribagarritasuna.

$f'(x) = \begin{cases} -2x-2 & x<0 \\ 1+\ln x & x>0. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2\cdot 0-2 = -2 \\ f'(0^+) = 1+\ln 0 = 1 \end{array}\right\}$ Ez da deribag. $x=0$

Hazkundea

Deribatua nulua izateko: $f'(x)=0$

$\begin{cases} -2x-2=0 \to x=-1. & x<0 \\ 1+\ln x=0 \to \ln x=-1 \\ \qquad x=e^{-1} & x>0. \end{cases}$

$f(x)$ ↗ -1 ↘ 0 ↘ $1/e$ ↗

$f'(x)$ + MAX − − MIN +

G. TARTEA $(-\infty,1) \cup (1/e,+\infty)$

B. TARTEA $(-1,0) \cup (0,1/e)$

MAX $(-1,1)$

MIN $(1/e,-1/e)$

29.om. Zuzen ukitzaileen ekuazioak

1a) $y = \ln(tg\, 2x)$ $x = \pi/8$.

Zuzen ukitzailea $y = y_0 + m(x - x_0)$
edo $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

- $P(x_0, y_0)$

$x = \pi/8 \rightarrow f(\pi/8) = \ln \underbrace{tg\left(\frac{\pi}{8} \cdot 2\right)}_{1} = 0 \rightarrow \boxed{P\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)}$

- Maldo = Deribatua $x = \pi/8$ danean:

$f'(x) = \frac{1}{tg\, 2x} \cdot 2 \cdot (1 + tg^2(2x))$

$f'(\pi/8) = \frac{1}{\underbrace{tg(\pi/8 \cdot 2)}_{1}} \cdot 2\left(1 + \underbrace{tg^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}_{1}\right) = \boxed{4}$

- Ukitzailea

$P(\pi/8, 0)$
$m = 4$

$\rightarrow y = 0 + 4(x - \pi/8) \rightarrow \boxed{y = 4x - \frac{\pi}{2}}$

b) $y = \sqrt{\sin 5x}$ $x_0 = \pi/6$.

- $P(x_0 y_0)$

$x_0 = \pi/6$

$f(\pi/6) = \sqrt{\sin \frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\sin 150} = \sqrt{\sin 30} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

$\boxed{P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

- Maldo

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin 5x}} \cdot \cos(5x) \cdot 5 = \frac{5\cos(5x)}{2\sqrt{\sin(5x)}}$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{\cos(5\pi/6)}{\sqrt{\sin(5\pi/6)}} = \frac{5}{2} \frac{\cos 150}{\sqrt{\sin 150}} =$

$= \frac{5(-\cos 30°)}{2\sqrt{\sin 30}} = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{1/2}} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{5\sqrt{6}}{4}}$

Ukitzailea $\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \pi/6\right)}$

271 b) $x^2+y^2-2x+4y-24=0$. (inplizituak) 9.2

$x_0=3$

Zuzen ukitzailearen ekuaziorako $P(x_0, y_0)$ eta $f'(x_0)=m$ behar da..

- PUNTUA KALKULATZEKO

$$3^2+y^2-2\cdot3+4\cdot y-24=0$$
$$9+y^2-6+4y-24=0$$
$$y^2+4y-21=0$$
$$y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-21)}}{2}=\begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-7 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_1(3,3) \\ P_2(3,-7) \end{matrix}}$$

- DERIBATUA (inplizituak)

$$2x+2yy'-2+4y'=0$$
$$y'(2y+4)=2-2x$$
$$y'=\frac{2-2x}{2y+4} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{1-x}{y+2}}$$

- MALDA → DERIBATUA PUNTUAN DA

$$P_1(3,3) \rightarrow y'=\frac{1-3}{3+2}=\boxed{\frac{-2}{5}}$$

$$P_2(3,-7) \rightarrow y'=\frac{1-3}{-7+2}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

- UKITZAILEAK $\boxed{y=y_0+m(x-x_0)}$

$$y_1=3+\left(\frac{-2}{5}\right)(x-3) \longrightarrow y_1=\frac{-2}{5}x+\frac{21}{5}$$
$$y_2=-7+\frac{2}{5}(x-3) \longrightarrow y_2=\frac{2}{5}x-\frac{41}{5}$$

c) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6.$ (m emonda) 9.3.

$y - x = 9$. zuzenarekiko paraleloa.

- Ukitzailea $y-x=9$ zuzenarekiko paraleloa bada, malda berdina izango dute

$$y - x = 9 \longrightarrow y = 9 + x \longrightarrow \boxed{m = 1}$$

- Malda, funtzioaren deribatua puntuan da, beraz; funtzioa deribatuko da, eta $m=1$-ekin berdindu.

$$\boxed{f'(x_0) = m}$$

$y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 6$

$y' = f'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} - 2x + 3$

- Berdintzen da $m=1$.

$x^2 - 2x + 3 = 1$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

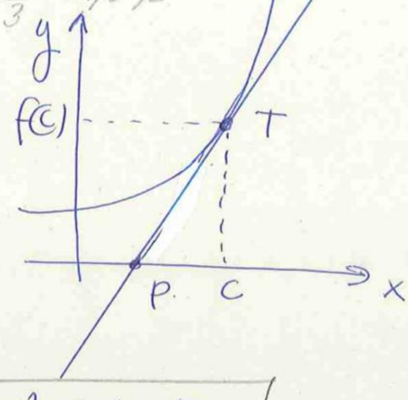
$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\nexists x$, ez dago puntuik non ukitzailea $y-x=9$ zuzenaren paraleloa den.

9.4

d) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$ $\quad P(2,0)$ (Kanpoko puntua)

$\frac{8}{3} - 4 + \cancel{2} - \cancel{2}$



· P(2,0) kanpoko puntua da

Bi puntuen arteko malda, T eta P, eta deribatua T puntuan berdinak dira

(1) Malda planteatu m_{TP}

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$P(2,0)$

$T(c, f(c))$

$f(c) = \frac{c^3}{3} - c^2 + c - 2$

$$\boxed{m = \frac{\frac{c^3}{3} - c^2 + c - 2 - 0}{c - 2}}$$

(2) Deribatua T puntuan

$f'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} - 2x + 1$

$\boxed{f'(c) = c^2 - 2c + 1}$

(3) Berdindu $\boxed{m = f'(c)}$

$$\frac{\frac{c^3}{3} - c^2 + c - 2}{c - 2} = c^2 - 2c + 1$$

$\frac{c^3}{3} - c^2 + \cancel{c} - \cancel{2} = c^3 - 2c^2 + \cancel{c} - 2c^2 + 4c - \cancel{2}$

$\frac{c^3}{3} - c^2 = c^3 - 4c^2 + 4c$

$c^3 = 3c^3 - 9c^2 + 12c \longrightarrow$

$2c^3 - 9c^2 + 12c = 0$

$c(2c^2 - 9c + 12) = 0$

$c = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \nexists$

$\boxed{c = 0}$

T puntua $\longrightarrow T(c, f(c))$

$\boxed{T(0, -2)}$

$f'(0) = 0^2 - 0c + 1 = 1 \longrightarrow \boxed{m = 1}$

(4) Zuzen ukitzailea

$\boxed{y = y_0 + m(x - x_0)}$

$y = -2 + 1(x - 0)$

$\boxed{y = x - 2}$

9./1

10. DERIBATUEN APLIKAZIOAK. (x₀ emanda)

279 or. [1] a) $y = \dfrac{5x^3+7x^2-16x}{x-2}$ $\quad x=0,\ x=1,\ x=3$ puntuetan

Ukitzailearen ekuazioa: $y = y_0 + m(x-x_0)$

edo $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

· Ekuazioan ordezkatzeko puntua $P(x_0, y_0)$ eta $f'(x_0)$ behar da:

· Deribatua: $y' = \dfrac{(15x^2+14x-16)(x-2)-(5x^3+7x^2-16x)}{(x-2)^2}$

$$y' = \frac{15x^3-30x^2+14x^2-28x-16x+32-5x^3-7x^2+16x}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{10x^3-23x^2-28x+32}{(x-2)^2}$$

· x_0 bakoitzarentzako y_0 eta $f'(x_0)$ kalkulatu:

* $x=0 \to f(0)=0 \to P_1(0,0)$ $\quad m=f'(0)=\frac{32}{4}=8$
* $x_1=1 \to f(1)=\dfrac{5\cdot1+7\cdot1-16\cdot1}{1-2}=4 \to P(1,4)$

$$f'(1)=\frac{10\cdot1-23-28+32}{(1-2)^2}=-9$$

* $x_2=3 \to f(3)=\dfrac{5\cdot3^3+7\cdot3^2-16\cdot3}{3-2}=150 \to P(3,150)$

$$f'(3)=\frac{10\cdot3^3-23\cdot3^2-28\cdot3+32}{(3-2)^2}=11$$

UKITZAILEAK

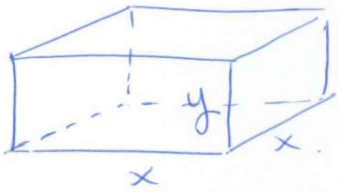
$y_1 = 0+8(x-0)$
$y_2 = 4-9(x-1)$
$y_3 = 150+11(x-3)$

$\Longrightarrow$

$y_1 = 8x$
$y_2 = -9x+13$
$y_3 = 11x+117$

23. Igerileku bat eraiki behar da paralelepipedo zuzen baten forman, oinarri karratu batekin. 192 m²-ko baldosak ditugu igerilekuaren hormak eta hondoa estaltzeko. Zehaztu igerilekuaren neurriak, gehienezko edukiera izan dezan.

DATUA



Baldosekin estaltzeko azalera $= 192\ m^2$

$$A = x^2 + 4xy$$

$$192 = x^2 + 4xy$$

$$y = \frac{192 - x^2}{4x}$$

BOLUMENA $\quad B(x) = x^2 \cdot y$

$$B(x) = x^2 \cdot \frac{192 - x^2}{4x} = \frac{(192 - x^2)\,x}{4}$$

$$\boxed{B(x) = \frac{1}{4}(192x - x^3)}$$

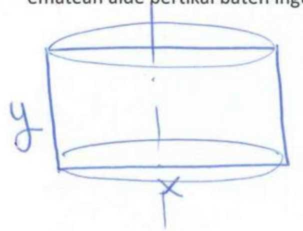
Bolumen maximoa:

$$B'(x) = \frac{1}{4}\cdot(192 - 3x^2)$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow 192 - 3x^2 = 0 \qquad \boxed{x = 8}$$

$$B''(x) = \frac{1}{4}(-6x)$$

24. Aurkitu 60 cm-ko perimetroa duen kartulina laukizuzen baten x oinarria eta y altuera, kontuan izanik bira oso bat ematean alde bertikal baten inguruan, bolumen maximoko zilindro bat eragiten duela.



$B(x,y) = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y$

DATUA $P = 60$ cm

$60 = 2x + 2y$

$\rightarrow y = 30 - x$

$B = \pi r^2 h$

$r = x/2$

$h = y$

• Beraz BOLUMENAREN FUNTZIOA aldagai bakar baten menpe:

$B(x) = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 (30 - x)$

$B(x) = \frac{\pi}{4} x^2 (30 - x)$

$\boxed{B(x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)}$

• Bolumen maximoa aurkitzeko $B'(x) = 0$

$B'(x) = \frac{\pi}{4}(60x - 3x^2)$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 60x - 3x^2 = 0$

$x(60 - 3x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 20}$

• Ziurtatzeko maximoa dela. $B'(x)$ $\oplus$ | $\ominus$; $B(x)$ $\nearrow$ 20 $\searrow$

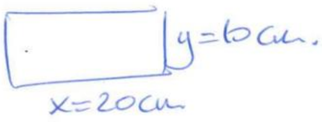
• $B''(x) = \frac{\pi}{4}(60 - 6x)$

$B''(20) = \frac{\pi}{4}(60 - 6 \cdot 20) < 0$ $B''(20) < 0 \rightarrow$ maximoa

• Beraz.

$x = 20$

$y = 10$



25. Diamante baten balioa bere pisuaren berbiduraren proportzionala da. Bitxigile batek diamante bat ebakitzeko esan dio bere laguntzaileari, eta zatiak ikusi dituenean ohartu da diamantearen balioaren galera maximoa izan dela. Nola ebaki du laguntzaileak diamantea?

BALIO MINIMOA

Diamantearen balioa $B = k \cdot P^2$

Bi zati egiten badira $\underbrace{x}_{1.\text{zatia}} \quad \underbrace{(P-x)}_{2.\text{zatia}} = y$

$$B(x,y) = k \cdot x^2 + k y^2$$

$$y = P - x.$$

$$B(x) = k \cdot x^2 + k(P-x)^2$$

$$= kx^2 + kP^2 - 2kPx + kx^2$$

$$\boxed{B(x) = 2k\,x^2 - 2kP\,x + kP^2}$$

Galera maximoa bada $\begin{cases} B'(x) = 0 \\ B''(x) < 0 \end{cases}$

$$B'(x) = 4kx - 2kP.$$

$$4kx - 2kP = 0 \longrightarrow x = \frac{2kP}{4k} \rightarrow \boxed{x = \frac{P}{2}}$$

$$B''(x) = 4k.$$

$$B''\left(\frac{P}{2}\right) = 4k > 0 \longrightarrow$$

Balio minimoa
berat galera
maximoa da
$x = P/2$
denean

KONTUAN IZAN
DIAMANTEAREN
BALIO MINIMOA DENEAN,
GALERA MAXIMOA
IZANGO DALA

19. Fruta-dendari batek kalkulatu du marrubi kilogramo bakoitzak sortutako irabazia salmenta-prezioaren araberakoa dela honako funtzio honen arabera: $B(x)=2x-x^2 - 0,84$, non B(x) kilogramo bakoitzeko irabazia den, eurotan adierazita, eta x kilogramo bakoitzaren prezioa, hau ere eurotan.

a) Kilogramo bakoitzeko zein prezioren artean daude biltegi-jabearen irabaziak?
b) Kilogramo bakoitzeko zein preziok maximizatzen ditu irabaziak?
c) Biltegian 10.000 kilogramo marrubi badituzu, zein izango da lor dezakezun irabazi total maximoa?

$\boxed{B(x) = -x^2+2x-0{,}84}$ IRABAZIEN FN

a) Irabaziak positiboak izateko.

$-x^2+2x-0{,}84 > 0$. $\cap$

$x^2-2x+0{,}84 < 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 0{,}84}}{2} = \begin{cases} 0{,}6 \\ 1{,}4 \end{cases}$

$B(x) > 0 \rightarrow x \in (0{,}6\,;\,1{,}4)$

b) IRABAZIAK MAXIMIZATZEN?

Prezio maximizatzen da parabolaren erpinean.

$-x^2+2x-0{,}84$

$-2x+2=0 \rightarrow \boxed{x=1}$.

$B(1) = -1^2+2\cdot 1-0{,}84 = 0{,}16$ €/kg.

c) 10.000 kg MARRUBI, IRABAZI MAXIMOAK.

$10.000 \cdot 0{,}16 = \underline{\underline{1600\text{ €}}}$

20. x, y zenbaki erreal positibo guztien artean, non x+y= 10 den, aurkitu p = x²y biderkadura maximoa dutenak.

$x+y=10 \longrightarrow y=10-x$

$p=x^2y$

$P(x)=x^2\cdot(10-x)$

$\boxed{P(x)=10x^2-x^3.}$

- $P'(x)=20x-3x^2$

$P'(x)=0 \longrightarrow 20x-3x^2=0$

$x(20-3x)=0 \quad x_1=0, \quad x_2=20/3.$

$P''(x)=20-6x.$

$P''(0)=20>0 \longrightarrow$ minimoa $x=0$

$P''\left(\frac{20}{3}\right)=20-6\frac{20}{3}=-20<0 \rightarrow$ maximoa $x=20/3$

- Biderketa maximoa izateko

$\boxed{x=20/3.}$

$\longrightarrow \boxed{P\left(\frac{20}{3}\right)=10\left(\frac{20}{3}\right)^2-\left(\frac{20}{3}\right)^3=148{,}15}$

Biderk maximoa

21. Telebista fabrika batek 300 €-tan saltzen ditu telebista bakoitza. x telebista fabrikatzeko kostuak $D(x) = 200x + x^2$ dira, non $0 \le x \le 80$ den.

a) Fabrikatu diren telebista guztiak saldu direla suposatuz, aurkitu x telebista fabrikatu eta saldu ondoren lortutako irabazi-funtzioa.

b) Zehaztu irabazi maximoa lortzeko fabrikatu behar diren gailu kopurua, baita aipatutako irabazi maximoa ere.

$D(x) = 200x + x^2 \quad 0 \le x \le 80$ Fabrikatzeko kostua.

a) IRABAZI FUNTZIOA

$I(x) = 300x - D(x)$

$I(x) = 300x - 200x - x^2$

$\boxed{I(x) = 100x - x^2}$

b) IRABAZI MAXIMOAK.

$I'(x) = 100 - 2x.$

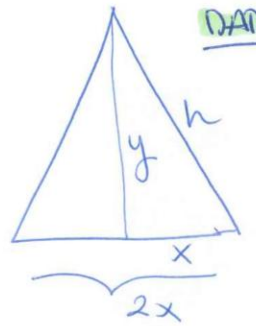
$I'(x) = 0 \longrightarrow 100 = 2x \longrightarrow x = 50.$

$I''(x) = -2 < 0 \longrightarrow x = 5$ maximoa da.

Irabazi maximoak $x = 50$ denean:

$I(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = \boxed{2500 \text{ €}}$

22. Kalkulatu 8ko perimetroa eta azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria eta altuera.



DATUA

$P = 8$

$h = \sqrt{x^2+y^2}$

$8 = 2\sqrt{x^2+y^2} + 2x.$

$8 - 2x = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$4 - x = \sqrt{x^2+y^2}$

$16 + \cancel{x^2} - 8x = \cancel{x^2} + y^2$

$\boxed{y = \sqrt{16-8x}}$

AZALERA FUNTZIOA

$A(x,y) = \dfrac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y = x \cdot \sqrt{16-8x}$

$\boxed{A(x) = x \cdot \sqrt{16-8x}} \Rightarrow \boxed{A(x) = \sqrt{16x^2 - 8x^3}}$

$\sqrt{4(4x^2-2x^3)}$

$A'(x) = \dfrac{32x - 24x^2}{2\sqrt{16x^2-8x^3}} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{16x - 12x^2}{\sqrt{16x^2-8x^3}}$

$4x^2(4-2x)$

$A'(x) = \dfrac{16x - 12x^2}{2x\sqrt{4-2x}} = \dfrac{8-6x}{\sqrt{4-2x}}$

$A'(x) = 0 \longrightarrow 8 - 6x = 0 \longrightarrow x = 8/6 = 4/3$

$2x = 8/6$

Berat: Azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria $8/3$ eta altuera

$y = \sqrt{16-8x} = \sqrt{16 - 8 \cdot \frac{4}{3}} = \underline{7,30}$ altuera

14. Aurkitu bi zenbaki, zeinen batura 20 den, haien biderketa maximoa dela jakinda.

$B(x,y) = x \cdot y$

DATUA: $x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$

$\Longrightarrow B(x) = x \cdot (20 - x)$

$\boxed{B(x) = 20x - x^2}$

$B'(x) = 20 - 2x$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 20 - 2x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 10}$

Konprobatu maximoa dela:

$B''(x) = -2 < 0 \longrightarrow$ $\underline{x = 10 \text{ MAXIMOA da}}$

$\boxed{\text{Zenbakiak } x = 10 \text{ eta } y = 10 \text{ dira}}$

15. Aurkitu zenbaki bat non, bere karratua kentzean, emaitza maximoa lortzen dan.

X ZENBAKIA

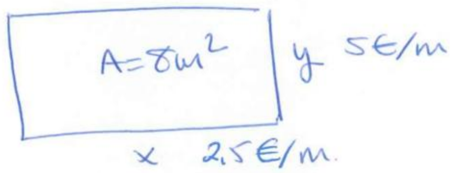
$f(x) = x - x^2$

$f'(x) = 1 - 2x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow \boxed{x = 1/2}$

$f''(x) = -2 < 0$ Berat maximoa da.

16. 8 m² dituen leiho baten -marko angeluzuzen bat eraiki behar da. Sekzio horizontalen metro lineal batek 2,50 euro balio du, eta sekzio bertikalen metro lineal batek, berriz, 5 euro. Zehaztu leihoaren neurriak markoaren kostua minimizatzeko, eta aurkitu marko horren prezioa.



$$\text{KOSTUA} = 2x \cdot 2{,}5 + 2y \cdot 5$$

$$\begin{cases} K = 5x + 10y \\ A = x \cdot y \rightarrow y = \dfrac{8}{x} \end{cases}$$

- KOSTU Fn $\rightarrow K(x) = 5x + 10 \cdot \dfrac{8}{x}$

$$\boxed{K(x) = 5x + \frac{80}{x}} \quad 80 \cdot x^{-1}$$

- $K'(x) = 5 + 80(-1) \cdot x^{-2} \rightarrow K'(x) = 5 - \dfrac{80}{x^2}$ $\quad -80x^{-2}$

$K'(x) = 0 \rightarrow 5 - \dfrac{80}{x^2} = 0 \rightarrow \dfrac{80}{x^2} = 5 \rightarrow \boxed{x = \pm 4}$

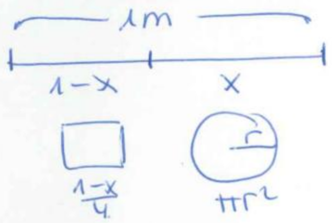
$K''(x) = \dfrac{160}{x^3}$ $\begin{cases} K''(4) = \dfrac{160}{4^3} > 0 \rightarrow x = 4 \text{ MIN.} \\ K''(-4) = \dfrac{160}{(-4)^3} < 0 \rightarrow x = -4 \text{ MAX} \end{cases}$

- KOSTU MINIMOA

$\boxed{x = 4} \rightarrow \boxed{y = 2}$ dauden

$K(4) = 5 \cdot 4 + \dfrac{80}{4} \rightarrow \text{KOSTUA} = \underline{\underline{40\ €}}$

18. Metro bateko luzera duen alanbre bat bi zatitan moztu dugu, batekin karratu bat eta bestearekin zirkulu bat eginez. Kalkulatu zati bakoitzaren neurriak, azaleraren batura hau maximoa izan dadin, azaleraren batura hau minimoa izan dadin.



FUNTZIOA : AZALEREN BATUKETA

$$A(x,r) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$P = 2\pi r \longrightarrow 2\pi r = x.$$
$$r = \frac{x}{2\pi}$$

$$A(x) = \left(\frac{1-x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$A(x) = \frac{1}{16}(1-x)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \frac{1}{16}(x^2-2x+1) + \frac{x^2}{4\pi} =$$

$$= \frac{\pi(x^2-2x+1)+4x^2}{16\pi} = \frac{x^2(\pi+4)-2x\pi+\pi}{16\pi}.$$

Azaleren batuketa funtzioa $\longrightarrow$ $\boxed{A(x) = \frac{1}{16\pi}\left[(\pi+4)\cdot x^2 - 2\pi x + \pi\right] \quad 0 \leq x \leq 1}$

Puntu singularrak aterako:

$$A'(x) = 0$$

$$A'(x) = \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x - \frac{2\cancel{\pi}}{16\cancel{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{8}} = \frac{\pi+4}{\cancel{8}\pi}x$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{\pi+4}}$$

$$A''(x) = \frac{2(\pi+4)}{16\pi} > 0 \Longrightarrow \text{minimoa}$$

Berat azaleraren batura minimoa $x = \frac{\pi}{\pi+4}$ denean emoten da alambrea $\frac{\pi}{\pi+4}$ eta $\frac{4}{4+\pi}$ m ko zatiak egiten.

10. Bederatzi zentimetroko sortzailea duten kono guztien artean, aurkitu bolumen maximoa daukanaren erradioa.

$g = 9\,cm$

$$B_{KONO} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \qquad h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{9^2 - r^2}$$

$$B_{KONO} = \frac{\pi r^2 \sqrt{81 - r^2}}{3} \qquad h = \sqrt{81 - r^2}$$

- BOLUMENAREN Fn $\boxed{B(x) = \frac{\pi}{3}\sqrt{81x^4 - x^6}}$

- Bolumen maximoa $B'(x) = 0$

$$B'(x) = \frac{\pi}{3} \; \frac{81 \cdot 4x^3 - 6 \cdot x^5}{2\sqrt{81x^4 - x^6}}$$

$$B'(x) = 0 \longrightarrow 81 \cdot 4 \cdot x^3 - 6x^5 = 0$$

$$x^3(324 - 6x^2) = 0$$

$$x^2 = \frac{324}{6} \qquad x = \pm\sqrt{54} = \pm 7{,}34$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 7{,}34} \quad (x = -7{,}34 \not\exists)$$

- Bolumen maximoa $r = 7{,}34$ cm-tan ematen da.

$$h = \sqrt{81 - 54} = 5{,}19$$

$$B(7{,}34) = \frac{\pi}{3}\sqrt{81 \cdot 7{,}34^4 - 7{,}34^6} = \boxed{293{,}83\,cm^3}$$

11. Metalezko pote zilindriko estalkidun batzuk egin nahi ditugu. Estalkian erabili beharreko metalaren kostua, metro karratuko, ontziko gainerako metalaren kostuaren erdia da. Poteek 10 litroko edukiera izatea nahi badugu, nola egin behar ditugu kostua minimoa izan dadin?

ESTALKIAREN KOSTUA $c/2$

GAINERAKO ONTZIAREN KOSTUA c

BOL = 10 l

KOSTUA MINIMOA IZATEKO?

$$A_{ESTALKIA} = \pi r^2$$

$$A_{GAINERAKOA} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

$$BOL = \pi r^2 \cdot h \longrightarrow 10 = \pi r^2 \cdot h \longrightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$$

$$K = \frac{c}{2}\pi r^2 + c\left(\pi r^2 + 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \frac{10}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}\right)$$

$$K(x) = \frac{c\pi}{2}x^2 + c\left(\pi x^2 + \frac{20}{x}\right)$$

$$\boxed{K(x) = \frac{3c\pi}{2}x^2 + \frac{20c}{x}}$$

- Kostu minimoa: $K'(x) = \frac{3c\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x - \frac{20c}{x^2}$.

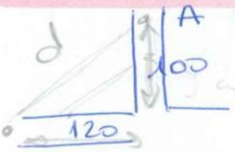
$$K'(x) = 0 \longrightarrow 3c\pi x = \frac{20c}{x^2}$$

$$x^3 = \frac{20\cancel{c}}{3\cancel{c}\pi} \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{20}{3\pi}} = 1{,}285 \text{ dm}.$$

$\boxed{\text{Kostu minimoa izateko } r = 1{,}285 \text{ dm.}}$

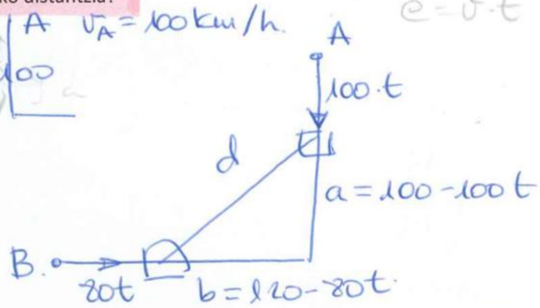
12 Bi automobil bi errepide perpendikularretik doaz. Lehe nengoa A hiritik irten da bi errepideen arteko bidegurutzerantz 100 km/h-ko abiaduran, eta bigarrena B hiritik 80 km/h-ko abiaduran. A-tik bidegurutzerainoko distantzia 100 kilometrokoa da, eta B-tik bidegurutzera 120 km daude. Zer momentutan izango da minimoa bi automobilen arteko distantzia?

$e = v \cdot t$



$v_A = 100\ km/h$

B
$v_B = 80\ km/h$



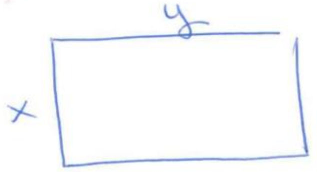
$$d = \sqrt{(100 - 100t)^2 + (120 - 80t)^2}$$
$$= \sqrt{24400 - 39200t + 16400t^2}$$
$$= 20\sqrt{61 - 98t + 41t^2}$$

$$d'(t) = \frac{20}{2} \frac{41 \cdot 2 \cdot t - 98t}{\sqrt{61 - 98t + 41t^2}}$$

$$d'(t) = 0 \longrightarrow 82t - 98t = 0 \longrightarrow \boxed{t = \frac{49}{41}}$$

$$t = 1{,}19512\ h = \underline{1h\ 11\ min\ 42\ sg}$$

13. Aurkitu 6 metroko perimetroa duen leiho angeluzuzen baten neurriak, azalera maximoa izan dezan eta, horrela, argitasun maximoa sortu dezan.



DATUAK

$P = 6m$

$6 = 2x + 2y \rightarrow \boxed{y = 3 - x}$

AZALERA FUNTZIOA

$A(x,y) = x \cdot y$

$\boxed{A(x) = x(3-x)}$

Azalera fu: $A(x) = 3x - x^2$

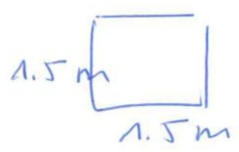
$A'(x) = 3 - 2x$

$A'(x) = 0 \rightarrow 3 = 2x \rightarrow x = 3/2$

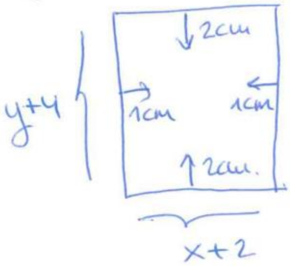
$A''(x) = -2 < 0 \rightarrow x = 3/2$ MAXIMOA DA

NEURRIAK: $x = 3/2$

$y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$



6. Orrialde batek 18 cm² testu eduki behar du. Goiko eta beheko marjinek bina zentimetro izan behar dituzte, eta alboetakoek bana. Aurki itzazu orriaren neurriak, pape raren kostua minimoa izan dadin. → AZALERA MINIMOA



AZALERA KOSTUA $= 18\,cm^2$

$18 = x \cdot y$

$A(x) = (x+2)(y+4)$

$y = \frac{18}{x}$

$A(x) = (x+2)\left(\frac{18}{x}+4\right)$

$A(x) = 18 + 4x + \frac{36}{x} + 8$

$$\boxed{A(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x}}$$

PAPERAREN KOSTUA, AZALERAREN MENPE DAGO

$A'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} \longrightarrow A'(x) = 0 \longrightarrow 4 = \frac{36}{x^2} \rightarrow x = \pm 3$

$A''(x) = -36(-2)x^{-3} = \frac{72}{x^3}$

$A''(-3) = \frac{72}{-27} < 0 \rightarrow f'' < 0$ MAXIMOA

$A''(3) = \frac{72}{+27} > 0. \rightarrow f'' > 0$ MINIMOA $\rightarrow x = 3$.

Beraz kostua minimoa $x = 3 \longrightarrow y = \frac{18}{3} = 6$

Paperaren neurriak $x+2 \longrightarrow 5$

$y+4 \longrightarrow 10.$

$\boxed{5 \times 10}$ cm.

7. Zer zenbaki positibok egiaztatzen du horri berorren aldrantzizkoa batuz gero ateratzen den batura minimoa izatea?

$B(x) = x + \frac{1}{x}$.

$B'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \frac{1}{x^2} = 1 \longrightarrow x = \pm 1$

$B''(x) = \frac{-1(-2)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$.

$B''(1) = 2 > 0 \quad x = 1$ minimo

$B''(-1) = -2 < 0 \quad x = -1$ maximo.

Batura minimoa: $B(1) = 1 + 1 = 2$.

$\boxed{\text{zenbakia } x = 1.}$

8. Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izango den eran.

$28 = x + (28 - x)$.

BIDERKADURA FUNTZIOA $B(x) = x \cdot (20 - x)$

$$\boxed{B(x) = 20x - x^2}$$

Maximoa izateko:

$B'(x) = 20 - 2x$.

$B'(x) = 0 \longrightarrow 20 - 2x = 0 \longrightarrow x = 10$.

$B'' = -2 < 0$. Beraz $\underline{x = 10}$. MAXIMOA da.

Beraz zenbakiak <u>10 eta 18 dira</u>

9. Kutxa ireki bat egiteko, hamar zentimetroko aldea duen kartoi karratu batetik kantoi bakoitzeko karratu bat moztuko dugu. Kalkula ezazu ebaki behar dugun karratuaren aldea, kutxaren bolumena maximoa izan dadin.

$\boxed{B(x) = (10-2x)^2 \cdot x}$ BOLUMENAREN FN.

$B(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$

$B'(x) = 12x^2 - 80x + 100$

$B'(x) = 0$

$12x^2 - 80x + 100 = 0$

$x = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 5/3 \end{cases}$ PTU sing

KARTOIAREN NEURRIAK

$(x+2) \times (x+2)$

$B(x) = (100 + 4x^2 - 40x)x$

Probatuz x_1 eta x_2 maximoa ala minimoa diren:

$B''(x) = 24x - 80$

$B''(5) = 24 \cdot 5 - 80 = 40 > 0$ minimo $x = 5$

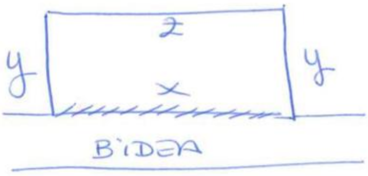
$B''(5/3) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 < 0$ $\boxed{\text{maximo } x = 5/3}$

· Beraz $x = 5/3$ denean bolumena maximoa da.

$B(5/3) = (10 - 2 \cdot 5/3)^2 \cdot 5/3 = \frac{2000}{27} = \boxed{24.69 \text{ cm}^3}$

2. GILTZA II (40.ARIK-275.ORR) Hesitu egin nahi dogun bide-bazterrean dagoen lursail errektangular bat. Bidearen ondoko hesiak 5€/m balio du eta beste hiru aldeetakoak 0,625 €/m. Kalkula ezazu 1800 eurorekin hesitu dezakegun azalera handieneko lurzailaren azalera.

Em: 115.200 m²



	PREZIOA
x	5 €/m
y, z	0,625 €/m.

Hesiaren prezioa: $P = 5x + (2y + x)\cdot 0{,}625$

$1800 = 5{,}625x + 1{,}25y \rightarrow y = \dfrac{1800 - 5{,}625x}{1{,}25}$

Azalera $A = x\cdot y \leftarrow A(x,y) = x\cdot y$

$y = \dfrac{1800 - 5{,}625x}{1{,}25} \Rightarrow A(x) = x \cdot \underbrace{\dfrac{1800 - 5{,}625x}{1{,}25}}_{y}$

AZALERA FUNTZIOA $\boxed{A(x) = \dfrac{1800x - 5{,}625x^2}{1{,}25}}$

Maximoa lortzeko $A'(x) = 0$.

$A'(x) = \dfrac{1800 - 11{,}25x}{1{,}25}$ $\quad \dfrac{1800 - 11{,}25x}{1{,}25} = 0 \rightarrow \boxed{x = 160}$ PTO SINF.

$A''(x) = -11{,}25 < 0 \rightarrow$ funtzio ganbila $\rightarrow$ MAXIMOA da

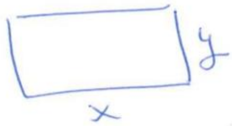
Beraz: AZALERA $A = x\cdot y$

$A = 160 \cdot \dfrac{1800 - 5{,}625\cdot 160}{1{,}25}$

$\boxed{A = 115{,}2\ m^2}$

non $x = 160$ m

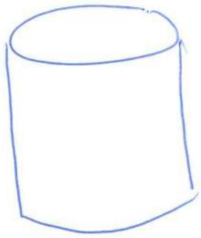
$y = 720$ m.



3. **GILTZA II (41.ARIK-275.ORR)** Petrolioa pilatzeko erabiltzen diren upelak zilindrikoak dira eta 160 litroko edukiera dute. Lortu zilindroaren dimentsioak, upelak erabilitako txaparen kantitatea minimoa izan dadin.

Em.: r = 2,94 dm, h = 5,88 dm

$1\ell = 1\,dm^3$

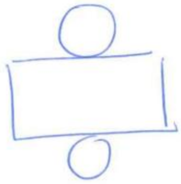


• BOLUMENA $= 160\ell$. (DATUA)

$B = \pi r^2 \cdot h$.

$160 = \pi r^2 h \rightarrow \boxed{h = \frac{160}{\pi r^2}}$

• Erabilitako txapa, zilindroaren azalera da



$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$.

$h = 160/\pi r^2 \rightarrow$

$A = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{160}{\cancel{\pi} r^2}$

$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{320}{r}$

$\boxed{A(x) = 2\pi x^2 + \frac{320}{x}}$ ← AZALERA FUNTZIOA.

Minimoa lortzeko $A'(x) = 0$

$-320x^{-2}$

$A'(x) = 4\pi x + 320 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$A'(x) = 0 \longrightarrow 4\pi x - \frac{320}{x^2} = 0 \Longrightarrow 4\pi x^3 - 320 = 0$

$x = \sqrt[3]{\frac{320}{4\pi}} \simeq 2{,}94\,dm$

Jakiteko $x = 2{,}94$ max edo min den:

$A''(x) \longrightarrow A''(x) =$

$A''(x) = 4x + \frac{320 \cdot 2}{x^3}$ $\quad A''(2{,}94) =$ $\quad \Rightarrow$ MINIMO

Beraz: $A(2{,}94) = 2\pi \cdot 2{,}94^2 + \frac{320}{2{,}94} = \boxed{163{,}15}$

$r = 2{,}94\,dm \longrightarrow h = \frac{160}{\pi r^2} = \frac{160}{\pi \cdot 2{,}94^2} =$

$\boxed{\begin{array}{l} 2{,}94\,dm = r \\ 5{,}88\,dm = h \end{array}}$

4. **GILTZA II (45.ARIK-275.ORR)** Esmeralda baten pisua 16 g-koa da eta, dakigunez, esmeraldaren balioa beren pisuaren karratuaren proportzionala da. Esmeralda hori bi zatitan ebakitzen badugu , kalkulatu zati bakoitzak izan behar duen pisua , balio minimoa izan dadin.

Em: 8g

Esmeralda bi zatitan: x eta $16-x$

Balioa $\longrightarrow$ x^2 eta $(16-x)^2$

$B(x) = x^2 + (16-x)^2$

$B'(x) = 2x + 2(16-x)(-1)$

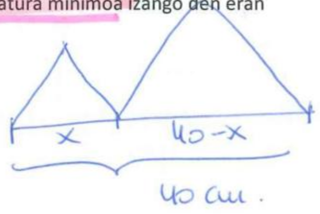
$= 4x - 32$

$B'(x) = 0 \longrightarrow 4x - 32 = 0 \longrightarrow \boxed{x=8}$

Beraz bi zatiak berdinak 8g koak.

5. Zati ezazu 40 zentimetroko segmentu bat bi partetan, horien gainean eraikitako triangelu aldekideen azaleren batura minimoa izango den eran

DATUA

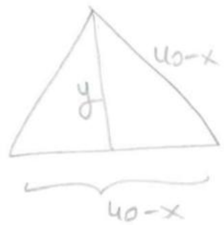


Segmentuaren bi zatiak x eta $40-x$.
eta dagokien azalerak:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2=x^2 \longrightarrow h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{4x^2-x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,x}{2}.$$

$$A_{T_1}=\frac{x\cdot h}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\,x}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}$$



$$\left(\frac{40-x}{2}\right)^2+y^2=(40-x)^2$$

$$y=\sqrt{(40-x)^2-\frac{(40-x)^2}{2^2}}=\sqrt{\frac{3}{4}(40-x)^2}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(40-x).$$

$$A_{T_2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}(40-x)^2}$$

- **Azaleren batuketa**

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\underbrace{(40-x)^2}_{1600+x^2-80x}$$

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(2x^2-80x+1600\right) \qquad \boxed{A(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-40x+800\right)}$$

AZALERA Fn.

- Minimoa kalkulatzeko $A'(x)=0$

$$A'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-40).$$

$$A'(x)=0 \longrightarrow 2x-40=0 \quad \boxed{x=20} \qquad A''(x)=\sqrt{3}>0 \longrightarrow \text{minimoa da.}$$

- Beraz segmentuaren bi zatiak <u>berdinak dira</u>

OPTIMIZAZIOA

1. **GILTZA II (38.ARIK-275.ORR)** Etxebizitza-agentzia batek 200 apartamentu dauzka alokaturik hiri batean eta bakoitzaren kasuan 160 euroko alokairua kobratzen du. Alokairua goratzen duen 5 euro bakoitzeko maizter bat galtzen du, merkeagoa den beste apartamentu batera pasatzen baita. Zein da agentziari irabazirik handiena dakarkion alokairua?

   Em: 580 €

2. **GILTZA II (40.ARIK-275.ORR)** Hesitu egin nahi dogun bide-bazterrean dagoen lursail errektangular bat. Bidearen ondoko hesiak 5€/m balio du eta beste hiru aldeetakoak 0,625 €/m. Kalkula ezazu 1800 eurorekin hesitu dezakegun azalera handieneko lurzailaren azalera.

   Em: 115.200 m^2

3. **GILTZA II (41.ARIK-275.ORR)** Petrolioa pilatzeko erabiltzen diren upelak zilindrikoak dira eta 160 litroko edukiera dute. Lortu zilindroaren dimentsioak, upelak erabilitako txaparen kantitatea minimoa izan dadin.
   Em.: r = 2,94 dm, h = 5,88 dm

4. **GILTZA II (45.ARIK-275.ORR)** Esmeralda baten pisua 16 g-koa da eta, dakigunez, esmeraldaren balioa beren pisuaren karratuaren proportzionala da. Esmeralda hori bi zatitan ebakitzen badugu , kalkulatu zati bakoitzak izan behar duen pisua , balio minimoa izan dadin.
   Em: 8g

5. Zati ezazu 40 zentimetroko segmentu bat bi partetan, horien gainean eraikitako triangelu aldekideen azaleren batura minimoa izango den eran

6. Orrialde batek 18 cm^2 testu eduki behar du. Goiko eta beheko marjinek bina zentimetro izan behar dituzte, eta alboetakoek bana. Aurki itzazu orriaren neurriak, pape raren kostua minimoa izan dadin.

7. Zer zenbaki positibok egiaztatzen du horri berorren aldrantzizkoa batuz gero ateratzen den batura minimoa izatea?

8. Deskonposa ezazu bi batugaitan 28 zenbakia, haien biderkadura maximoa izango den eran.

9. Kutxa ireki bat egiteko, hamar zentimetroko aldea duen kartoi karratu batetik kantoi bakoitzeko karratu bat moztuko dugu. Kalkula ezazu ebaki behar dugun karratuaren aldea, kutxaren bolumena maximoa izan dadin.

10. Bederatzi zentimetroko sortzailea duten kono guztien artean, aurkitu bolumen maximoa daukanaren erradioa.

11. Metalezko pote zilindriko estalkidun batzuk egin nahi ditugu. Estalkian erabili beharreko metalaren kostua, metro karratuko, ontziko gainerako metalaren kostuaren erdia da. Poteek 10 litroko edukiera izatea nahi badugu, nola egin behar ditugu kostua minimoa izan dadin?

12. Bi automobil bi errepide perpendikularretik doaz. Lehe nengoa A hiritik irten da bi errepideen arteko bidegurutzerantz 100 km/h-ko abiaduran, eta bigarrena B hiritik 80 km/h-ko abiaduran. A-tik bidegurutzerainoko distantzia 100 kilometrokoa da, eta B-tik bidegurutzera 120 km daude. Zer momentutan izango da minimoa bi automobilen arteko distantzia?

13. Aurkitu 6 metroko perimetroa duen leiho angeluzuzen baten neurriak, azalera maximoa izan dezan eta, horrela, argitasun maximoa sortu dezan.

14. Aurkitu bi zenbaki, zeinen batura 20 den, haien biderketa maximoa dela jakinda.

15. Aurkitu zenbaki bat non, bere karratua kentzean, emaitza maximoa lortzen dan.

16. 8 m^2 dituen leiho baten -marko angeluzuzen bat eraiki behar da. Sekzio horizontalen metro lineal batek 2,50 euro balio du, eta sekzio bertikalen metro lineal batek, berriz, 5 euro. Zehaztu leihoaren neurriak markoaren kostua minimizatzeko, eta aurkitu marko horren prezioa.

17. Aurkitu 3 zenbaki ez-negatibo, euren arteko batuketa 14 dana. Zenbaki bat bestearen bikoitza izan behar da eta haien karratuen batura :
a) Maximoa izanik
b) Minimoa izanik

18. Metro bateko luzera duen alanbre bat bi zatitan moztu dugu, batekin karratu bat eta bestearekin zirkulu bat eginez. Kalkulatu zati bakoitzaren neurriak, azaleraren batura hau maximoa izan dadin, azaleraren batura hau minimoa izan dadin.

19. Fruta-dendari batek kalkulatu du marrubi kilogramo bakoitzak sortutako irabazia salmenta-prezioaren araberakoa dela honako funtzio honen arabera: $B(x)=2x-x^2 - 0{,}84$, non $B(x)$ kilogramo bakoitzeko irabazia den, eurotan adierazita, eta x kilogramo bakoitzaren prezioa, hau ere eurotan.

a) Kilogramo bakoitzeko zein prezioren artean daude biltegi-jabearen irabaziak?
b) Kilogramo bakoitzeko zein preziok maximizatzen ditu irabaziak?
c) Biltegian 10.000 kilogramo marrubi badituzu, zein izango da lor dezakezun irabazi total maximoa?

20. x, y zenbaki erreal positibo guztien artean, non $x+y= 10$ den, aurkitu $p = x^2y$ biderkadura maximoa dutenak.

21. Telebista fabrika batek 300 €-tan saltzen ditu telebista bakoitza. x telebista fabrikatzeko kostuak $D(x) = 200x + x^2$ dira, non $0 \leq x \leq 80$ den.
a) Fabrikatu diren telebista guztiak saldu direla suposatuz, aurkitu x telebista fabrikatu eta saldu ondoren lortutako irabazi-funtzioa.
b) Zehaztu irabazi maximoa lortzeko fabrikatu behar diren gailu kopurua, baita aipatutako irabazi maximoa ere.

22. Kalkulatu 8ko perimetroa eta azalera maximoa dituen triangelu isoszelearen oinarria eta altuera.

23. Igerileku bat eraiki behar da paralelepipedo zuzen baten forman, oinarri karratu batekin. 192 m^2-ko baldosak ditugu igerilekuaren hormak eta hondoa estaltzeko. Zehaztu igerilekuaren neurriak, gehienezko edukiera izan dezan.

24. Aurkitu 60 cm-ko perimetroa duen kartulina laukizuzen baten x oinarria eta y altuera, kontuan izanik bira oso bat ematean alde bertikal baten inguruan, bolumen maximoko zilindro bat eragiten duela.

25. Diamante baten balioa bere pisuaren berbiduraren proportzionala da. Bitxigile batek diamante bat ebakitzeko esan dio bere laguntzaileari, eta zatiak ikusi dituenean ohartu da diamantearen balioaren galera maximoa izan dela. Nola ebaki du laguntzaileak diamantea?

OPTIMIZAZIOA

1. **GILTZA II (38.ARIK-275.ORR)** Etxebizitza-agentzia batek 200 apartamentu dauzka alokaturik hiri batean eta bakoitzaren kasuan 160 euroko alokairua kobratzen du. Alokairua goratzen duen 5 euro bakoitzeko maizter bat galtzen du, merkeagoa den beste apartamentu batera pasatzen baita. Zein da agentziari irabazirik handiena dakarkion alokairua?

Em: 580 €

	HASIERAN	BERRIA
APARTAM.	200.	$200-x$
PREZIOA	160 €	$160+5x$.
DIRU SARRERA	$200\cdot 160$	$(200-x)(160+5x)$

IRABAZIAK $\boxed{f(x) = (200-x)\cdot(160+5x)}$

Irabazirik handiena lortzeko, IRABAZIRIK MAXIMOA lortu behar da. Maximoa puntu singularra da beraz $f'(x)$ bilatuko da eta $f'(x)=0$ kalkulatu.

$$f(x) = 32000 + 1000x - 160x - 5x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -5x^2 + 840x + 32000} \quad -5<0 \Rightarrow \text{PARABOLA GANBILA da.}$$

⇓

ERPINA MAXIMOA

$$f'(x) = -10x + 840.$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -10x+840=0 \rightarrow \boxed{x=84}.$$

Kasu honetan badakigu $x=84$ denean maximo bat dagoela parabola ganbila delako

Maximoetan $f''(x_0)<0$ da eta idatzi daiteke

$$f''(x) = -10 \rightarrow f''(84) = -10 < 0 \rightarrow \text{ganbila}$$

⇓

MAXIMOA.

ONDORIOZ Alokairua $= 160+5\cdot 84 = \boxed{580\ €}$

OPTIMIZAZIO-PROBLEMAK EBAZTEKO ARGIBIDEAK

Honelako problemetan optimizatu behar dugun funtzioa ezagutzean datza benetako zailtasuna; optimizatu behar dogun funtzioaren adierazpen analitikoa aurkitzea. Problema honeek ebazten ohitzeko, hona hemen jarraibide batzuk:

1.- **IRAKURRI problemaren enuntziatua behin eta berriro**; ia buruz jakin arte.

2.- Identifikatu optimizatu behar dogun funtzioa (azalera, bolumena, distantzia, denbora, abiadura, kopurua,….)

3.- Problemaren datuak erabiliz, optimizatu beharreko funtzioa aldagai bakar baten menpe adierazi(aukeratu ondo aldagaia; deribatzerakoan sarritan aldagai bat bestea baino erosoagaoa da eta).

4.- Aurreko puntuan lortutako funtzioa deribatu eta zerora berdinduz lortzen dogun ekuazioa ebatzi $f'(x)=0$.

Ebazpen honetatik lortuko doguz máximo edo minimo posibleak.

5.- Berretsi maximoa edo minimoa:

a)Optimizatu behar dogun funtzioaren bigarren deribada kalkulatu eta bertan lortutako erroa ordezkatu: $\begin{cases} f''(x_0) < 0 \quad bada \quad Minimoa \\ f''(x_0) > 0 \quad bada \quad Maximoa \end{cases}$

b) Optimizatu behar dogun funtzioaren lehenengo deribadaren taula osotu.

	X_0
f´(x)	+++++++++++++++++0- - - - - - - - - - - - - - -
	Maximoa

	X_0
f´(x)	- - - - - - - - - - - - - - -0++++++++++++++++
	Minimoa

Link interesgarria

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/euskaraz/optimacion.htm

JARRAIAN DAUKAZUZ HIRU ADIBIDE; AZTERTU ARRETAZ

ADIBIDEA 1: 2400 m²-ko azalera daukan laukizuzen itxurako partzela bat hesi batez inguratu nahi da. Horrez gain, aldeetako bati paraleloa dan beste hesi baten bidez, partzela bi zati berdinetan zatitu nahi da. Aurkitu zein izan beharko litzateke partzelaren neurriak erabili beharreko hesi-kantitatea minimoa izan daiten.

EBAZPENA

1.- **IRAKURRI problemaren enuntziatua behin eta berriro**; ia buruz jakin arte. Horrez gain grafiko bat egin eta ezezagunak identifikatu.

2.- Identifikatu optimizatu behar dogun funtzioa (hesiaren luzera: $f(x, y) = 3y + 2x$)

3.- Problemaren datuak erabiliz, optimizatu beharreko funtzioa aldagai bakar baten menpe adierazi.

x eta y aldagaien arteko lotura laukizuzenaren azalerak emoten duezku: $2400 = x \cdot y$.

x aldagai aukeratuz, y askatu eta optimizatu behar dogun funtzioan ordezkatuko dopgu.

$y = \dfrac{2400}{x}$, beraz $f(x) = 3 \cdot \dfrac{2400}{x} + 2x = \dfrac{7200}{x} + 2x$

4.- Aurreko puntuan lortutako funtzioa deribatu eta zerora berdinduz lortzen dogun ekuazioa ebatzi:

$f'(x) = -\dfrac{7200}{x^2} + 2 = 0$ $\qquad -7200 + 2x^2 = 0$ $\qquad x^2 = \dfrac{7200}{2} = 3600$ $\qquad x = \mu 60$

Baina laukizuzenaren aldea ezin daiteke negatiboa izan beraz x edo zabalera 60 m-koa izango da eta luzera $y = \dfrac{2400}{x} = \dfrac{2400}{60} = 40\ m$ -koa izango da.

5.- Berretsi minimoa:

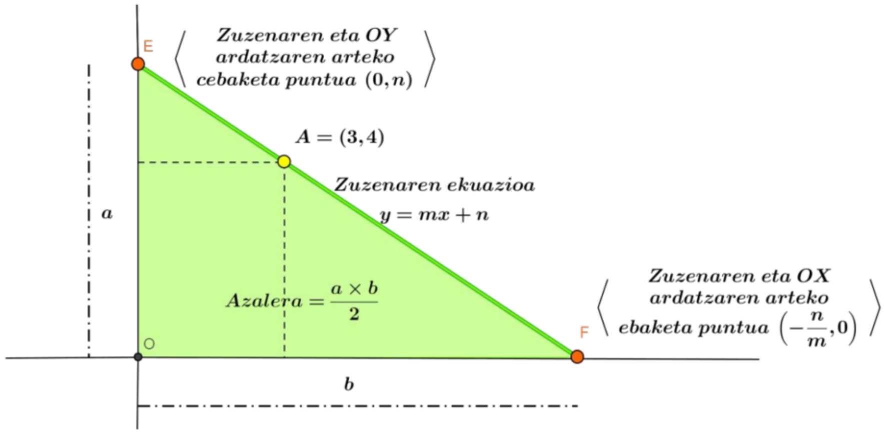
	10 60 80
$f'(x) = -\dfrac{7200}{x^2} + 2$	- - - - - - - - - - - - - - -0++++++++++++++++
	Minimoa

Beraz partzelaren neurriak zabalera 60 m eta luzera 40 m dira

ADIBIDEA 2:Kalkulatu A(4,3) puntutik pasatzen dan zuzenaren ekuazioa, jakinik zuzen horrek erdi-ardatz positiboekaz osatzen dauan triangeluaren azalera minimoa dala.

EBAZPENA:

1.- Grafiko bat egin eta ezezagunak identifikatu.



2.- Identifikatu optimizatu behar dogun funztioa: Triangeluaren azalera $Azalera = \frac{a \times b}{2}$

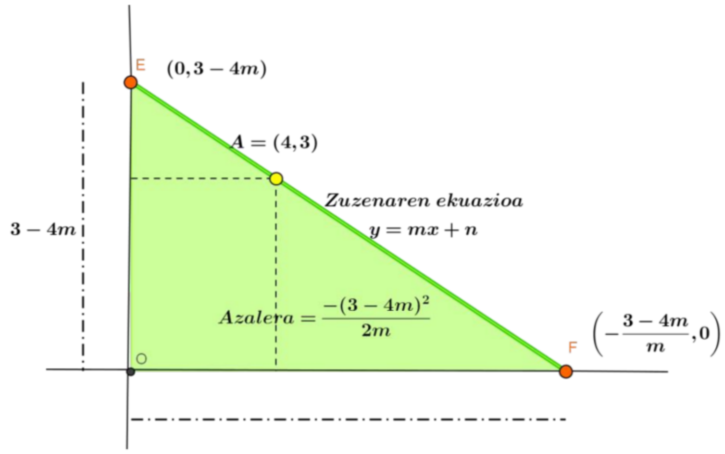
3.- Problemaren datuak erabiliz, optimizatu beharreko funtzioa aldagai bakar baten menpe adierazi.

- OX ardatzagaz ebaketa puntua $y = mx + n = 0 \quad \rightarrow \quad x \ askatu \quad x = \frac{-n}{m} = b$
- OY ardatzagaz ebaketa puntua $x = 0 \quad \rightarrow \quad y = m \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad y \ askatu \quad y = n = a$
- $y = mx + n$ zuzena A(3,4) puntutik pasatu → $n = 3 - 4m$

Hiru ekuazioak kontuan hartuta, a eta b triangeluaren aldeak aldagai bakar baten menpe adierazi daikeguz: $\frac{-(3-4m)}{m} = b$ $\quad (3-4m) = a$; eta ondoren optimizatu behar dogun funtzioa (Triangeluaren azalera) "m" aldagairen menpe adierazi.

$$Azalera = \frac{a \times b}{2} = \frac{-(3-4m)^2}{2m} \qquad f(m) = \frac{-(3-4m)^2}{2m}$$

4.- Aurreko puntuan lortutako funtzioa deribatu eta zerora berdinduz lortzen dogun ekuazioa ebatzi:



$$f(m) = \frac{-(3-4m)^2}{2m}$$

$$f'(m) = \frac{-2(3-4m)\cdot(-4)\cdot 2m + 2(3-4m)^2}{(2m)^2} = \frac{-32m^2+18}{(2m)^2}$$

$$f'(m) = 0 \quad \rightarrow \quad -32m^2+18=0 \quad \rightarrow \quad Ebatzi \quad m = \begin{cases} 3/4 \\ -3/4 \end{cases}$$

5.- Berretsi minimoa:

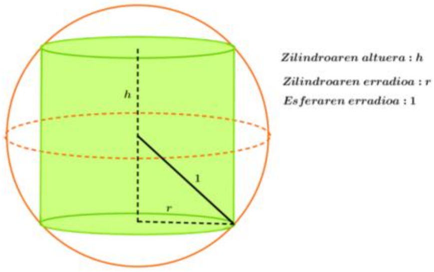
	-1 -3/4 0 3/4 1
$f'(m) = \frac{-32m^2+18}{(2m)^2}$	- --- - - - - 0+++++++++++++0- - - - - -
	↘ Minimoa ↗ ↘

Beraz, $m = -\frac{3}{4}$ eta $n = 3 - 4\cdot(-\frac{3}{4}) = 6$ diranean, zuzenak eta erdi-ardatz positiboak osatzen triangeluaren azalera minimoa izano da.

Orduan zuzenaren ekuazioa $y = -\frac{3}{4}x + 6$ **izango da**

ADIBIDEA 3: Erradio 1 metroko esfera baten inskribatutako zilindro guztietatik, kalkulatu bolumen maximoa daukana.

1.- Grafiko bat egin eta ezezagunak identifikatu.



2.- Identifikatu optimizatu behar dogun funztioa; zilindroaren bolumena: $B(r,h)=\pi r^2 h$

3.- Problemaren datuak erabiliz, optimizatu beharreko funtzioa aldagai bakar baten menpe adierazi. Horretarako aldagaien arteko erlazioa bilatu: Pitagorasen teorema erabiliz

$$1^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2 \quad \rightarrow \quad r^2=1-\frac{h^2}{4}$$

Aldagaiaren (h) balio mugak 0 eta 2 izanik.

Ondoren optimizatu behar dogun funtzioa (Bolumena) "h" aldagairen menpe adierazi:

$$B(r,h)=\pi r^2 h \quad \rightarrow \quad B(h)=\pi\left(1-\frac{h^2}{4}\right)h=\pi\left(h-\frac{h^3}{4}\right)$$

4.- Aurreko puntuan lortutako funtzioa deribatu eta zerora berdinduz lortzen dogun ekuazioa ebatzi:

$$B'(h)=\pi\left(1-\frac{3h^2}{4}\right)=0 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{3h^2}{4}=0 \quad \rightarrow \quad 4-3h^2=0 \quad \rightarrow \quad h=\left\{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right.$$ baina

$h=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ balioa ez dago (0,2) tartean beraz ez dau balio.

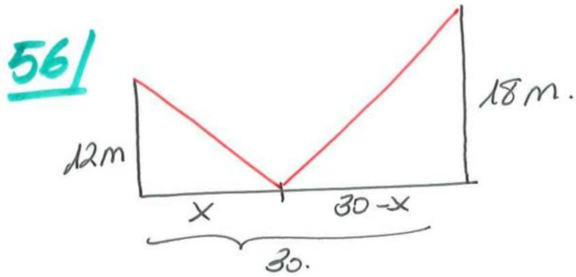
5.- Berretsi maximoa eta kasu horretan zilindroaren neurriak altuera $h=\frac{2}{\sqrt{3}}\ m$ eta $r=\sqrt{\frac{2}{3}}\ m$ izango dira.

	$h = 2/\sqrt{3}$
$B'(h)=\pi\left(1-\frac{3h^2}{4}\right)$	++++++++++++++ 0 - - - - - - - - - - - - -
	$\nearrow$ Maximoa $\searrow$

GOGORATU PAUSUAK

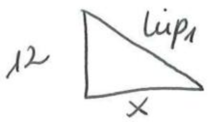
1. DATUAK APUNTATU /MARRAZKIA
2. EZEZAGUNAK DEFINITU
3. DATUAK ETA EZEZAGUNAK EKUAZIO MODUAN ADIERAZI.
4. MAXIMIZATU / MINIMIZATU BEHAR DUGUN FUNTZIOA ADIERAZI
5. EZEZAGUN BAT BAINO GEHIAGO EGOTEKOTAN DENA EZEZAGUN BATEN MENPE ADIERAZI.
6. FUNTZIOAREN MAXIMIZAZIO EDO MINIMIZAZIORAKO LEHEN DERIBATUA EGIN. **$f'(x)=0$**
7. MAXIMOA EDO MINIMOA DEN KONBROBATU. (BIGARREN DERIBATU EDO ALBOKO TARTEEN ZEINUA)
8. BIGARREN ALDAGAIA EBATZI
9. SOLUZIOA ARGI ADIERAZI

56/



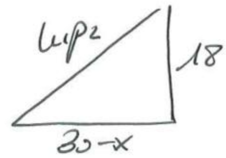
DANAK: Irudian.

FUNTZIOA: kablearen luzera minimoa



$lip_1 = \sqrt{12^2 + x^2}$

$lip_2 = \sqrt{18^2 + (30-x)^2}$



$$L(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{324 + 900 - 60x + x^2}$$

$$\boxed{L(x) = \sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1224 - 60x + x^2}}$$ Luzeraren funtzioa.

· Minimoa lortzeko $\longrightarrow L'(x) = 0 \longrightarrow L''(x) > 0.$

$$L'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{144+x^2}} + \frac{\cancel{2}x - \cancel{60}^{\,30}}{\cancel{2}\sqrt{1224 - 60x + x^2}} =$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{x^2 - 60x + 1224} + (x-30)\sqrt{x^2+144}}{\sqrt{(x^2+144)(x^2-60x+1224)}}$$

$$L'(x) = 0 \Longrightarrow x\sqrt{x^2-60x+1224} + (x-30)\sqrt{x^2+144} = 0$$

$$\left(x\sqrt{x^2-60x+1224}\right)^2 = \left((30-x)\sqrt{x^2+144}\right)^2$$

$$x^2(x^2-60x+1224) = (30-x)^2(x^2+144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1224x^2 = (900 - 60x + x^2)(x^2+144)$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{60x^3} + \underline{1224x^2} = \underline{900x^2} + 129600 - \cancel{60x^3} - 8640x + \cancel{x^4} + \underline{144x^2}$$

$$180x^2 + 8640x - 129600 = 0$$

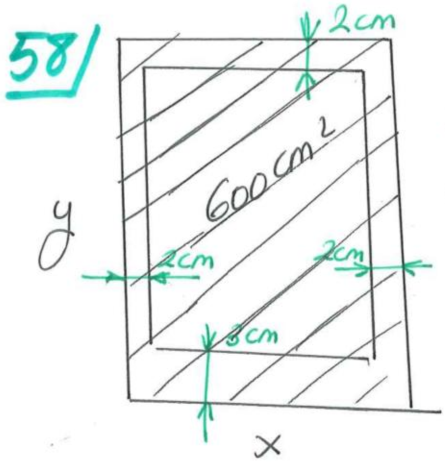
$$x^2 + 48x - 720 = 0.$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-720)}}{2} = \begin{cases} 12 \\ \cancel{-60} \end{cases}$$

		12	
L'	⊖		⊖
L	↘		↗

MINIMOA da 12 metroko distantzira

58/



FUNTZIOA: INPRIMATZEKO AZALERA MAXIMOA izateko

DATUA $A = 600\,cm^2$

Inprimatzeko azalera.

$$A(x,y) = (x-4)\cdot(y-5)$$

$$600 = xy \rightarrow y = \frac{600}{x}$$

$$A(x) = (x-4)\cdot\left(\frac{600}{x} - 5\right)$$

$$A(x) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20$$

$$\boxed{A(x) = 620 - 5x - \frac{2400}{x}}$$

· Maximoa izateko $A'(x) = 0 \longrightarrow A''(x) < 0$.

$$A'(x) = -5 + 2400/x^2$$

$$0 = -5 + \frac{2400}{x^2} \Longrightarrow \frac{2400}{x^2} = 5 \quad x = \pm\sqrt{\frac{2400}{5}} = \pm 4\sqrt{30}$$

$x = -4\sqrt{30}$ ez dau balio.

· konprobatzeko $x = 4\sqrt{30}$ maximoa dan.

$$A''(x) = \frac{-2400\cdot 2}{x^3} \longrightarrow A''(4\sqrt{30}) = \frac{-2400\cdot 2}{(4\sqrt{30})^3} < 0 \quad \text{Maximoa da.}$$

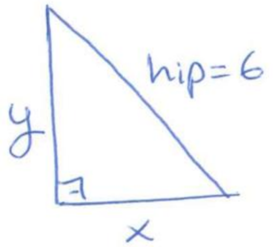
· Beraz orrialdearen neurriak izango dira

$$x = 4\sqrt{30} = 21{,}90\ cm$$

$$y = \frac{600}{4\sqrt{20}} = 27{,}39\ cm.$$

295/10 DATUA → HIPOTENUSA = 6 m.

AZALERAREN FUNTZIOA MAXIMOA



$$A(x,y)=\frac{x\cdot y}{2}$$

DATUA → $hip^2 = k_1^2 + k_2^2$

$$6^2 = x^2 + y^2$$

$$y=\sqrt{36-x^2}$$

- Beraz azaleraren funtzioa

$$A(x)=\frac{x\cdot\sqrt{36-x^2}}{2} \qquad x>0.$$

- Maximoa lortzeko $A'(x)=0$ eta $A''(x_0)<0$.

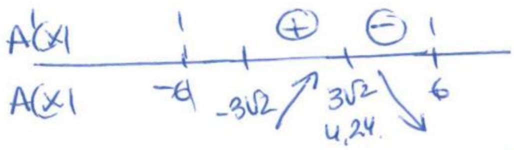
$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{36-x^2}+x\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{36-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{36-x^2-x^2}{\sqrt{36-x^2}}=\frac{\frac{36-2x^2}{2}}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$\boxed{A'(x)=\frac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}}$$

$A'(x)=0 \rightarrow \dfrac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}=0 \rightarrow x^2=18$

$x=\pm 3\sqrt{2}$

~~$x=-3\sqrt{2}$~~



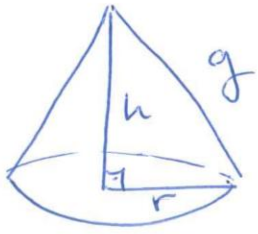
Konprobatzen da $x=3\sqrt{2}$ funtzioaren maximoa dela.

$$y=\sqrt{36-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Beraz triangeluaren katetoek, biek $3\sqrt{2}=4{,}25$ m neurtzen dute

52/ DATUAK : konoaren sortzailea $g = 10\,cm$

BOLUMENAREN funtzioa EDUKIERA MAXIMOA izateko



$$B(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

DATUA $g = 10\,cm$.

$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$100 = h^2 + r^2 \longrightarrow r^2 = 100 - h^2$$

$$B(h) = \frac{\pi \cdot (100 - h^2) \cdot h}{3}$$

$$\boxed{B(h) = \frac{\pi}{3}(100h - h^3)} \qquad h > 0$$

· Maximoa izateko $B'(h) = 0 \longrightarrow B''(h_0) < 0$

$$B'(h) = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$$

$$B'(h) = 0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2) = 0 \rightarrow h = \sqrt{\frac{100}{3}} = \pm\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$h = -10/\sqrt{3}$ ezin da izan.

· Konprobatzeko $h = 10/\sqrt{3}$ maximoa dela.

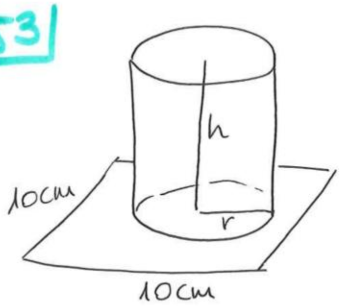
$$B''(h) = \frac{\pi}{3}(-6h)$$

$$B''\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\left(-6\,\frac{10}{\sqrt{3}}\right) < 0 \rightarrow \text{Beraz } h = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ denean}$$

MAXIMOA dago.

$$\cdot\ h = \frac{10}{\sqrt{3}} \longrightarrow r = \sqrt{100 - \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{300 - 100}{3}} = \sqrt{\frac{200}{3}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}\,cm$$

53



DATUAK: Zilindroaren alboko azalera $50\,cm^2$

BOLUMENAREN FUNTZIOA MAXIMOA izatiko.

$B = \pi r^2 \cdot h.$

$B(r,h) = \pi r^2 h.$

Alboko azalera $A_{alb} = 2\pi r \cdot h \longrightarrow 50 = 2\pi r h \longrightarrow h = \frac{50}{2\pi r}$

$\longrightarrow h = \frac{25}{\pi r}.$

Beraz BOLUMENAREN FUNTZIOA:

$B(r) = \cancel{\pi} r^2 \frac{25}{\cancel{\pi} r} \Rightarrow \boxed{B(r) = 25r}$

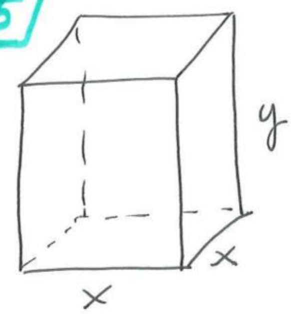
Maximoa kalkulatzeko: $B'(r) = 0 \longrightarrow B''(r_0) < 0.$

$B'(r) = 25 \longrightarrow$ Funtzioa beti gorakorra da, ez dauka maximo erlatiborik.

Beraz maximo absolutua, irudiko karratuak baldintzatuko dau.

Beraz $\boxed{r = 5\,cm.}$

55



DATUAK: EDUKIERA $80\ cm^3$.

FUNTZIOA OPTIMIZATZEKO: PREZIOAREN FUNTZIOA, MINIMOA izateko

· Oinarriaren materialaren prezioa, tapa eta alboko azala baino %50 garestiagoa dela materiala.

Demagun "p" dela tapa eta alboko azalaren prezioa/m^2

· taparen eta alboko azala $\rightarrow p$ €/cm^2

· oinarriaren prezioa $\rightarrow 1{,}5 \cdot p$ €/cm^2

• Bost azalaren prezioa:

$$F(x,y) = 1{,}5p \cdot x^2 + p \cdot x^2 + p \cdot 4 \cdot xy$$

$$F(x,y) = 2{,}5p\,x^2 + 4p\,xy$$

• Datua erabiliz: (bolumena $= 80\ cm^3$)

$$B = x^2 y \rightarrow 80 = x^2 y \rightarrow \boxed{y = \frac{80}{x^2}}$$

• Azaleren prezioaren funtzioa, x-ren menpe.

$$F(x) = 2{,}5p\,x^2 + 4p\cancel{x} \cdot \frac{80}{x^2}$$

$$\boxed{F(x) = 2{,}5p\,x^2 + \frac{320p}{x}}$$

• Minimoa lortzeko $\rightarrow F'(x) = 0$ eta $F'(x) < 0$.

$$F'(x) = 5px - \frac{320p}{x^2}$$

$$5px - \frac{320p}{x^2} = 0$$

$$p\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = 0 \nearrow \quad 5x = \frac{320}{x^2} \rightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64$$

$$\boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

Minimoa.

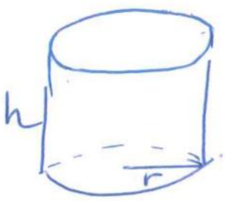
F' : $\ominus$ | $\oplus$

F : $\searrow$ 4 $\nearrow$

LIBURUKO OPTIMIZAZIOKO BURUKETAK

295/ 9./ DATUAK Zilindroaren azalera $54\ cm^2$

BOLUMENAREN FUNTZIOA maximoa.



$$B(r,h) = \pi r^2 h.$$

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$54 = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{\cancel{2}(27 - \pi r^2)}{\cancel{2}\pi r}$$

$$h = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} \Longrightarrow B(r) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \frac{27 - \pi r^2}{\cancel{\pi} \cancel{r}}$$

Beraz optimizatu beharreko bolumenaren funtzioa:

$$\boxed{B(r) = 27r - \pi r^3} \quad r > 0$$

· Bolumena maximoa izateko $B'(r) = 0 \rightarrow B''(r_0) < 0$

$$B'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$B'(r) = 0 \rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \pm \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

$r = -3/\sqrt{\pi}$ ezin da izan

$r = 3/\sqrt{\pi}$

$$B''(r) = -6\pi r \rightarrow B''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0 \rightarrow \underline{\underline{\text{MAXIMOA}}}$$

$\boxed{r = 3/\sqrt{\pi}}$ denean Bolumen maximoa lortuko da

$$h = \frac{27 - \pi \cdot (3/\sqrt{\pi})^2}{\pi\, 3/\sqrt{\pi}} = \frac{27 - \frac{9\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}}{\pi\, 3/\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} = \boxed{\frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}\ cm = h}$$