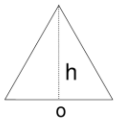
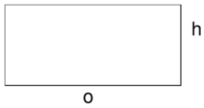
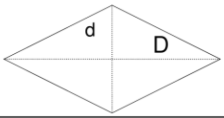
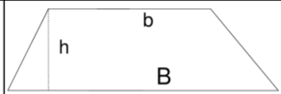
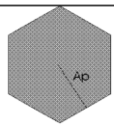
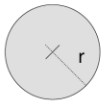
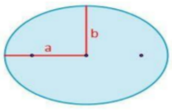
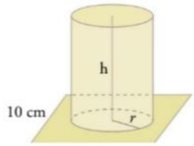
<table>
<tr><th>IZENA</th><th></th><th>AZALERA</th></tr>
<tr><td>TRIANGELUA</td><td>
</td><td>$A = \frac{o \cdot h}{2}$</td></tr>
<tr><td>LAUKIZUZENA</td><td>
</td><td>$A = o \cdot h$</td></tr>
<tr><td>KARRATUA</td><td>
</td><td>$A = l \cdot l = l^2$</td></tr>
<tr><td>ERRONBOA</td><td>
</td><td>$A = \frac{D \bullet d}{2}$</td></tr>
<tr><td>PARALELOGRAMOA</td><td>
</td><td>$A = o \cdot h$</td></tr>
<tr><td>TRAPEZIOA</td><td>
</td><td>$A = \frac{B + b}{2} \bullet h$</td></tr>
<tr><td>POLÍGONO ERREGULARRA</td><td>
</td><td>$A = \frac{\text{Perimetro} \bullet \text{Apotema}}{2}$</td></tr>
<tr><td>ZÍRKULUA ZIRKUNFERENTZIA</td><td>
</td><td>$P = 2 \cdot \pi \cdot r$
$A = \pi r^2$</td></tr>
<tr><td>ELIPSEA</td><td>
</td><td>$A = \pi a b$</td></tr>
</table>

51 Laukizuzen-itxurako lursail bat 100 m hesi metaliko erabilita itxi nahi da. Sailaren alde batean, 20 m-an hesirik ez egotea erabaki da, atea jartzeko. Kalkulatu horrela itxi daitekeen azalera maximoko lursail laukizuzenaren aldeen neurriak. Kalkulatu, horrez gain, azalera maximo horren balioa.

52 Kono-itxurako ontzi bat egin nahi dugu, 10 cm-ko sortzailea eta edukiera maximoa izango dituena. Zein izan behar da oinarriaren erradioa?

53 10 cm-ko aldea duen karratu baten gainean 50 cm^2-ko alboko azalera duen zilindro bat dugu. Zein izan behar da erradioa bolumena maximoa izateko?



54 Triangelu isoszele batek 12 cm-ko oinarria du (alde desberdina), eta 10 cm-ko altuera. Bertan laukizuzen bat inskribatu dugu, aldeetako bat triangeluaren oinarrian jarriz, eta bi erpin, alde berdinen gainean:

a) Adierazi laukizuzenaren A azalera x oinarriaren funtzioan, eta esan zein den funtzioaren definizio-eremua.

b) Kalkulatu funtzio horren balio maximoa.

55 7.3 **helburua.** Oinarri karratua eta 80 cm^3-ko edukiera duen prisma erregular baten itxurako ontzi bat egin nahi dugu. Tapa eta alboko gainazala egiteko, material jakin bat erabiliko dugu; baina oinarrirako, % 50 garestiagoa den beste bat erabili behar dugu. Kalkulatu zer neurri izan behar duen ontzi horrek prezioa ahalik eta txikiena izateko.

56 12 m-ko eta 18 m-ko altuera duten bi poste bata bestetik 30 m-ra daude. Kable bat bota nahi dugu, poste horien arteko lurzoruko puntu bat posteen muturrekin lotzeko. Non jarri behar da lurzoruko puntua kablearen luzera osoa minimoa izateko?

57 (1, 2) puntutik igarotzen diren zuzen guztien artean, aurkitu zeinek zehazten duen koordenatuen ardatzekin, lehenengo koadrantean, azalera minimoko triangelu bat.

58 Liburu bateko orrialde bakoitzak 600 cm^2-ko azalera izan behar du, eta testuaren inguruan 2 cm-ko marjina utzi behar da goialdean, 3 cm-koa behealdean, eta 2 cm-koa alboetan. Kalkulatu zer dimentsio izan behar dituen orrialdeak inprimatutako azalera ahalik eta handiena izateko.

EGIN: 51,52,53,55,58

SELEKTIBITATEA
2018 UZTAILA

Eman triangelu angeluzuzen batek izan dezakeen azalera maximoa haren hipotenusaren neurrian 8 bada.

EBAU 2022-EZ OHIKOA

A3 Ariketa

Kalkulatu $y = 3x - 2$ zuzenarekiko paraleloak diren $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

B3 Ariketa

Izan bedi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + Ax, & x \leq 1 \text{ bada,} \\ Bx - A, & x > 1 \text{ bada.} \end{cases}$$

(a) Aurkitu A eta B parametroen balioak f zuzen erreal osoan deribagarria izan dadin.

(b) Egin f-ren adierazpen grafikoa (a) atalean lortutako A eta B parametroen balioekin.

EBAU 2022-OHIKOA

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$ funtzioa. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f nulua izan dadin $x = 1$ abszisa duen puntuan eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezen.

1. ADIBIDEA. Deskonposatu 36 zenbakia bi batugai positibotan, kontuan hartuz lehenengo batugaiaren eta bigarrenaren karratuaren arteko biderkadurak maximoa izan behar dutela.

1.- EZEZAGUNAK DEFINITU

Bi zenbaki positibo

x→ zenbaki positibo bat y → beste zenbakia positibo

2.- DATUAK ETA EZEZAGUNAK EKUAZIO MODUAN ADIERAZI.

$x+y=36$ $0<x<36$ eta $0<y<36$

3.- MAXIMIZATU / MINIMIZATU BEHAR DUGUN FUNTZIOA ADIERAZI

Biderkatura_maximoa $f(x,y)=x\cdot y^2$

4.- EZEZAGUN BAT BAINO GEHIAGO EGOTEKOTAN DENA EZEZAGUN BATEN MENPE ADIERAZI.

$y=36-x$ $f(x)=x\cdot(36-x)^2$ $f(x)=x\cdot(x^2-72x+1296)=x^3-72x^2+1296x$

5.- FUNTZIOAREN MAXIMIZAZIO EDO MINIMIZAZIORAKO LEHEN DERIBATUA EGIN. **f'(x)=0**

$f'(x)=3x^2-144x+1296$

$f'(x)=0$ $x_1=12$ $x_2=36$ (Ezin da izan bestela beste biderkagaia 0 litzateke)

6.- MAXIMOA EDO MINIMOA DEN KONBROBATU. (BIGARREN DERIBATU EDO ALBOKO TARTEEN ZEINUA) **f''(x)=0**

$x_1=12$ $f''(x)=6x-144$ $f''(12)<0$ GANBILA → MAXIMOA

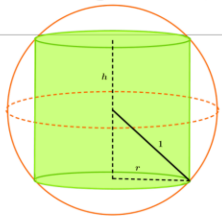
7.- BIGARREN ALDAGAIA EBATZI

$y=36-x$ $y=12$

8.- SOLUZIOA

$x=12$ $y=24$

ADIBIDEA 2: Erradio 1 metroko esfera baten inskribatutako zilindro guztietatik, kalkulatu bolumen maximoa daukana.



$Zilindroaren\ altuera : h$

$Zilindroaren\ erradioa : r$

$Esferaren\ erradioa : 1$

1.- Grafiko bat egin eta ezezagunak identifikatu.

2.- Identifikatu optimizatu behar dogun funtzioa; zilindroaren bolumena:

$$B(r,h) = \pi r^2 h$$

3.- Problemaren datuak erabiliz, optimizatu beharreko funtzioa aldagai bakar baten menpe adierazi. Horretarako aldagaien arteko erlazioa bilatu:

Pitagorasen teorema erabiliz

$$1^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 \quad \rightarrow \quad r^2 = 1 - \frac{h^2}{4}$$

Aldagaiaren (h) balio mugak 0 eta 2 izanik.

Ondoren optimizatu behar dogun funtzioa (Bolumena) "h" aldagairen menpe adierazi

$$B(r,h) = \pi r^2 h \quad \rightarrow \quad B(h) = \pi\left(1 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi\left(h - \frac{h^3}{4}\right)$$

4.- Aurreko puntuan lortutako funtzioa deribatu eta zerora berdinduz lortzen dogun ekuazioa ebatzi:

$$B'(h) = \pi\left(1 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{3h^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \left\{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right. \text{ baina}$$

$h = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ balioa ez dago (0,2) tartean beraz ez dau balio.

5.- Berretsi maximoa eta kasu horretan zilindroaren neurriak altuera $h = \frac{2}{\sqrt{3}}\ m$ eta $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\ m$ izango dira.

	$h = 2/\sqrt{3}$
$B'(h) = \pi\left(1 - \frac{3h^2}{4}\right)$	++++++++++++++ 0 - - - - - - - - - - - - -
	Maximoa

295) EGIN ZEUK - 9//

Zilindro itxurako deposito bat egin nahi dute latorriz, 54 cm^2-ko azalera izango duena guztira. Zehaztu zer erradio izan behar duen oinarriak eta zenbatekoa izan behar den altuera zilindroaren bolumena maximoa izateko.

295) EGIN ZEUK 10//

Itsasontzi bateko oihal nagusiak triangelu angeluzuzenaren itxura du. Hipotenusak 6 m baditu, kalkulatu zein izan behar diren oihalaren neurriak azalera maximoa izateko.

EREDUA 2025

(4B) Izan bedi $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

Aurkitu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

Aurkitu f-ren mutur erlatiboak, eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

Aurkitu f-ren asintotak.

SELEKTIBITATEA: 2022 EKAINA

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f nulua izan dadin $x = 1$ abszisa duen puntuan eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezen.

FUNTZIO BATEN KOEFIZIENTEAK

SELEKTIBITATEA

2012 UZTAILA

$f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$

a) Kalkulatu itzazu A,B eta C parametroen balioak f-ren grafikoa (1,1) puntutik pasa dadin, x=-4 balioan maximo bat izan dezan eta x=0 balioan ukitzaile horizontal bat izan dezan.

B) Kalkulatu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak, eta marraztu ezazu funtzioaren grafikoak.

ARIKETAK:

298ORR. 17-26

SELEKTIBITATEA 2018 UZTAILA

Aztertu $f(x)=x^3+3x^2-2$ funtzioaren gorakortasun eta beherakortasun tarteak eta f(x)-en muturrak. Egin ezazu f(x)-ran adierazpen grafikoa.

EREDUA 2025

(4B) Izan bedi $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

Aurkitu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

Aurkitu f-ren mutur erlatiboak, eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

Aurkitu f-ren asintotak.

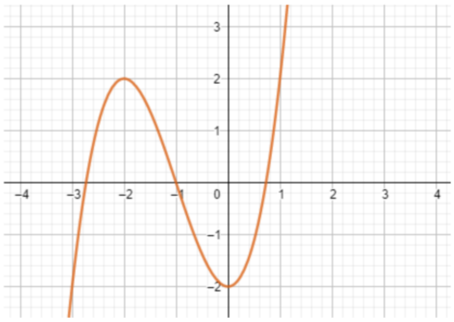
GORAKORTASUN TARTEAK: (-∞,-2) U (0, ∞)

BEHERAKORTASUN TARTEAK: (-2,0)

MINIMO ERLATIBOA: (0,-2)

MAXIMO ERLATIBOA: (-2,2)

INFLEXIO PUNTUA: (-1,0)



ARIKETAK: 293orr

10.c,d,f

11.a,d

12.b,d,e,f

14

15

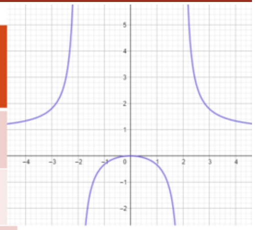
6. FUNTZIOEN OPTIMIZAZIOA

Zientzia , ekonomia , politika eta abarreko arlo askota, eta hainbat matematika problemetan, funtzioak optimizatzea, hau da, haien maximo eta minimoak aurkitzea, interesatzen zaigu. Hori gertatzen da, adibidez, baldintza jakin batzuen pean lantegi baten produkzio kostua minimizatu nahi badugu, edo lursail batean barazkien produkzioa maximizatu nahi badugu hezetasun eta tenperatura baldintza jakin batzuetan. Horrelako problemak ebazteko, honakoak egin beharko ditugu:

1. Aldagaiak edo ezezagunak definitu (batzutan irudia). **IRAKURRI problemaren enuntziatua behin eta berriro**; ia buruz jakin arte
2. Identifikatu optimizatu behar dogun funtzioa (azalera, bolumena, distantzia, denbora, abiadura, kopurua,….) **F(x,y) normalean**
3. Funtzio horrek bi aldagai edo gehiago badauzka, ekuazio lagungarriak aurkitu **datuak erabiliz, aldagai bakar baten bidez adierazi** ahal izateko. **F(x).** Aukeratu ondo aldagaia; deribatzerakoan sarritan aldagai bat bestea baino erosoagaoa da eta).
4. Funtzioaren **maximo eta minimo erlatiboak aurkitu** **f'(x)=0**
5. Konprobatu lortutako balioa MAXIMOA edo MINIMOA den. (f''(x) ren ikurragaz edo alboko tarteen zeinua aztertu). Emaitzak interpretatu, nolako problema den kontuan izanik zentzurik ez dutenak baztertuz.
6. Soluzioa emon

ARIKETAK:
285.Orr 1→ 4
299.orr 51 → 58

	(-∞,-2) x=-2 (Asintota)	(-2,0) x=0	(0,2)	(2, +∞) x=2 (Asintota)
f'(x)=0	x=-5 f'(-5)>0	x=-1 f'(-1)>0	x=1 f'(1)<0	x=10 f'(10)<0
	GORAKOR↑	GORAKOR↑	BEHERAKOR↓	BEHERAKOR↓
		x=0-n MAXIMOA max(0,0)		
f''(x)=0 $f''(x)=\frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$ $f''(x)\neq 0\ \forall x\ etarako$ EZ DAGO INFLEXIO PUNTURIK	f''(-5)>0 Ahurra	f''(-1)<0 Ganbila	f''(1)<0 Ganbila	f''(3)>0 Ahurra
		f''(0)<-1/2 GANBILA max(0,0)		



$f(x)=x^3+3x^2-2$	$(-\infty,-2)$	$x=-2$	$(-2,0)$	$x=0$	$(0,\infty)$
$f'(x)=3x^2+6x$ $f'(x)=0=3x^2+6x$ $3x(x+2)=0$ $x_1=0$ eta $x_2=-2$	$f'(-5)>0$ ↑GORAKORRA		$f'(-1)<0$ ↓ BEHERAKORRA		$f(1)>0$ ↑GORAKORRA
		MAXIMO ERLATIBOA $x=-2$ $f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-2=2$ Max(-2,2)		MINIMO ERLATIBOA $x=0$ $f(2)=0^3+3\cdot0^2-2=-2$ min(0,-2)	
$f''(x)=6x+6$ $f''(x)=6x+6=0$ $x=-1$			$x=-1$		
		$f''(-2)=6(-2)+6<0$ GANBILA MAXIMO ERLATIBOA $x=-2$ $f(-2)=(-2)^3+3\cdot(-2)^2-2=2$ Max(-2,2)		$f''(0)=6\cdot0+6>0$ AHURRA MINIMO ERLATIBOA $x=0$ $f(2)=0^3+3\cdot0^2-2=-2$ min(0,-2)	
	$f''(-5)<0$ GANBILA		$f''(-1.5)<0$ GANBILA	$f''(0)>0$ AHURRA	$f''(1)>0$ AHURRA
			INFLEXIO PUNTUA $x=-1$ $f(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-2=0$ INFLEXIO PUNTUA (-1,0)		

FUNTZIOEN ANALISIRAKO PAUSUAK

1. Funtzioaren definizio eremua kalkulatu.
2. Ardatzekin ebakitze puntuak
3. Simetriak eta periodikotasuna
4. Funtzioaren deribatua kalkulatu $f'(x)$.
5. Puntu singularrak kalkulua $f'(x)=0$.
6. Hazkundea: Tarteetako zeinua kalkulatu, tarteko balio bat ordezkatuz x_0.

   $f'(x_0)>0$ Gorakorra tartean $f'(x_0)<0$ Beherakorra
7. Ganbiltasuna, ahurtasuna eta inflexio puntua.(m=0 lortutako x-ak ordezkatu)
   - $f''(x)>0$ Ahurra. Minimoa
   - $f''(x)<0$ Ganbila. Maximoa
   - $f''(x)=0$ Inflexio puntua
8. Grafikoa

5. FUNTZIOEN KOEFIZIENTEAK KALKULATU

Honelako ariketak ebazteko, enuntziatuek emoten dituzten datuak funtzioei buruz ondo interpretatu eta **hizkuntza matematikora itzultzi** izaten da prozesua.

1.- Ariketak behin eta berriro irakurri, esaldi bakoitzak eskeintzen duen informazioa jasotzeko.
2.- Datu bakoitza ekuazio matematiko baten bidez formulatu.
3.-Kalkulatu behar diren koefiziente beste ekuazio planteatu eta sistema ebatzi.
4.- Koefizienteak funtzioan ordezkatu eta funtzioa osotu

- **HIZKUNTZA MATEMATIKORA ITZULI :**
- Funtzioa puntu batetik pasatzen da $(A, B) \rightarrow f(A) = B$
- Funtzioak max, min edo mutur erlatibo bat dauka

$$\begin{cases} \rightarrow (A,B) \begin{cases} f(A) = B \\ f'(A) = 0 \end{cases} \\ \rightarrow x = A \rightarrow f'(A) = 0 \end{cases}$$

- Limiteen bitartez baldintzaren bat emon
- Funtzioak inflexio puntua dauka:

$$\begin{cases} \rightarrow (A,B) \begin{cases} f(A) = B \\ f''(A) = 0 \end{cases} \\ \rightarrow x = A \rightarrow f''(A) = 0 \end{cases}$$

- Funtzioak y =mx+n zuzenarekiko paraleloa dan zuzen ukitzailea dauka:

$$\begin{cases} \rightarrow (A,B) \begin{cases} f(A) = B \\ f'(A) = m \end{cases} \\ \rightarrow x = A \rightarrow f'(A) = m \end{cases}$$

17 $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$ funtzioa izanda, kalkulatu a-ren balioa zein den $f(x)$ funtzioak $x = 3$ abzisa-puntuan mutur erlatibo bat duela jakinda. Maximo bat da, ala minimo bat?

18 $f(x) = ax^3 + bx$ funtzioari buruz badakigu $(1, 1)$ puntutik igarotzen dela eta puntu horretan $3x + y = 0$ zuzenarekiko paraleloa den ukitzaile bat duela. Aurkitu a eta b.

19 Aurkitu $x = 2$ abzisa-puntuan mutur erlatibo bat duen eta $P(1, 2)$ puntuan inflexio-puntu bat duen $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioa.

20 Kalkulatu $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ funtzioaren a, b eta c koefizienteak, honako hau jakinda:

a) $x = 0$ puntuan duen ukitzailea $y = x$ da.

b) Mutur erlatibo bat du $(-1, 0)$ puntuan.

21 Zer balio izan behar dute a, b, c eta d koefizienteek $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funtzioak maximo erlatibo bat izateko $(0, 4)$-n eta minimo erlatibo bat $(2, 0)$-n.

22 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ eta $g(x) = x - cx^2$ funtzioak $(1, 0)$ puntutik igarotzen dira. Zehaztu zein izan behar diren a, b eta c koefizienteak, puntu horretan zuzen ukitzaile bera izan dezaten, eta kalkulatu ezazu.

23 $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$ funtzioa izanda, kalkulatu a eta b koefizienteen balioak, kontuan hartuz bi inflexio-puntu dituela: $x = 1$ puntuan eta $x = 1/2$ puntuan.

24 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ kurbak abzisa-ardatza ebakitzen du $x = -1$ puntuan eta inflexio-puntu bat du $(2, 1)$ puntuan. Kalkulatu a, b eta c.

25 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioak hauek betetzen ditu: $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ eta f-k ez duela mutur erlatiborik $x = 1$ puntuan. Kalkulatu a, b eta c.

26 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ da. Aurkitu zein izan behar diren a eta b koefizienteak $y = f(x)$ kurbak ukitzaile horizontaleko inflexio-puntu bat izan dezan $x = 1$ puntuan.

27 Aurkitu zein izan behar den c-ren balioa $y = \frac{e^x}{x^2 + c}$ funtzioak puntu kritiko bakarra izan dezan.

Maximo bat da, minimo bat edo inflexio-puntu bat?

EBAU 2025 **(4A)** Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 2$ abszisa duten puntuetan paraleloak dira. Gainera, f-k mutur erlatibo bat dauka $x = 1$ denean, eta $f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ da.

Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = -1$ abszisa duen puntuan, $A = -3$, $B = 0$ eta $C = 4$ parametroen balioetarako.

EBAU 2022 **B3 Ariketa**

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A, B eta C parametroen balioak f nulua izan dadin $x = 1$ abszisa duen puntuan eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezen.

SELEKTIBITATEA: 2022 EKAINA

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$ funtzioa. Aztertu f-ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

Gorakorra izango da $f'(x) > 0$ eta beherakorra izango da $f'(x) < 0$ denean.

$f'(x) = 0 \longrightarrow$ Maximo eta minimoak | $Dom f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2(x-1) \cdot e^{-2x} + (x-1)^2 (-2) \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} [2x - 2 - 2x^2 + 4x - 2]$

$\boxed{f'(x) = e^{-2x} [-2x^2 + 6x - 4]}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow 0 = \underbrace{e^{-2x}}_{0} \underbrace{(-2x^2 + 6x - 4)}_{0}$

$e^{-2x} \neq 0$

$-2x^2 + 6x - 4 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = 2, 1$

$\boxed{f'(x) = e^{-2x} (-2)(x-2)(x-1)}$

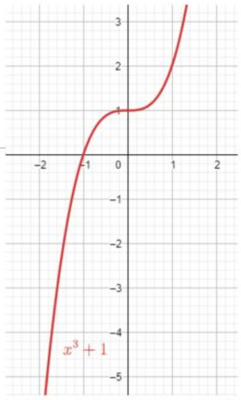
		1		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$	min $(1, 0)$	$\nearrow$	max $(2, e^{-4})$	$\searrow$

$f(1) = (1-1)^2 e^{-2 \cdot 1} = 0$

$f(2) = (2-1)^2 e^{-2 \cdot 2} = 1 \cdot e^{-4}$

G. $(1, 2)$ max $(2, e^{-4})$

B $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ min $(1, 0)$



4. AHURTASUNA, GANBILTASUNA ETA INFLEXIO PUNTUAK (273orr)

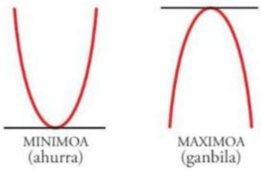
Funtzioaren **bigarren deribatuak** emango digu informazio hau.

f''(x)>0 Ahurra

f''(x)<0 Ganbila

f''(x)=0 Inflexio puntua

f'''(0)≠0 bada



Adibidez:

f(x)=x³-3x+5

$f'(x)=3x^2-3$ $3x^2-3=0$ $x^2=1$ $x_1=1$ $x_2=-1$

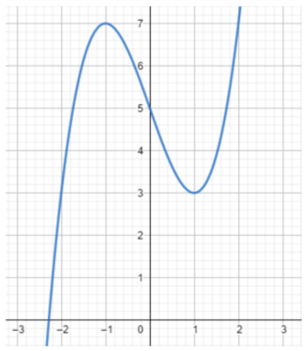
$f''(x)=6x$ $f''(-1)=-6 < 0$ → Ganbila

$f''(1)=6 > 0$ → Ahurra

$y''=0$ $6x=0$ $x=0$ → Inflexio puntua, ahurra izatetik ganbila izatera pasatzen den puntua (0,5)

Aztertu funtzio hauen hazkundea, puntu singularrak eta kurbadura

f(x)=x³-3x+5



GORAKORTASUN TARTEAK: (-∞,-1) U (1, ∞)

BEHERAKORTASUN TARTEAK: (-1,1)

MINIMO ERLATIBOA: (1,3)

MAXIMO ERLATIBOA: (-1,7)

INFLEXIO PUNTUA: (0,5)

Oharra:

Inflexio puntu bat dagoen konprobatzeko f'''(0)≠0

Aztertu funtzio hauen hazkundea, eta puntu singularrak

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \qquad f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

1. Dom f(x)= R-{-2,2}. Ez da deribagarria x=-2 eta x=2 puntuetan.
2. Deribatua: $f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$
3. Deribatua 0 den puntua, hau da zuzen ukitzailearen malda 0 den puntua: $\frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \; x = 0$
4. Tarteetako zeinua kalkulatzeko tarteak: (-∞,-2) U (-2,2) U (2, +∞)
5. Ahurtasuna, ganbiltasuna eta inflexio puntua.

$$f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^2 + 8x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-8(x^2-4) + 32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-8x^2 + 32 + 32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(0) = \frac{24 \cdot 0 + 32}{(0-4)^3} = \frac{32}{-64} = -\frac{1}{2} < 0 \;\; Ganbila\ da$$

$$Maximoa\ x = 0\ puntuan.\max(0,0)$$

292.orr

1. Kurbaren puntu bateko ukitzailea

Idatzi, posible bada, $f(x) = |x|e^{-x}$ kurbak 0 eta -1 abzisa-puntuetan dituen zuzen ukitzaileen ekuazioak.

1. Funtzioa tartean definitu →

- Funtzioa tartetan definituko dugu: $f(x) = \begin{cases} -xe^{-x} & x < 0 \text{ bada} \\ xe^{-x} & x \geq 0 \text{ bada} \end{cases}$.

  f funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan; izan ere $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

2. Jarraitasuna eta deribagarritasuna aztertu →

- $f'(x) = \begin{cases} (-1+x)e^{-x} & x < 0 \text{ bada} \\ (1-x)e^{-x} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$ funtzio deribatua lortuko dugu:

  f deribagarria da $x = -1$ puntuan, baina ez $x = 0$ puntuan; izan ere, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.

  Beraz, ez da existitzen ukitzailerik $x = 0$ puntuan.

3. Kalkulatu ukitzaileak

- $x = -1$ abzisa-puntuaren ordenatua kalkulatuko dugu: $f(-1) = 1e^1 = e \rightarrow P(-1, e)$

  $x = -1$ puntuko zuzen ukitzailearen malda hau da: $m = f'(-1) = -2e$

  -1 abzisa-puntuko zuzen ukitzailearen ekuazioa hau da: $y = e - 2e(x+1)$

2. FUNTZIO BATEN HANDIAGOTZEA ETA TXIKIAGOTZEA PUNTU BATEAN (272orr)

Funtzio gorakorra: $x_1 > x_0 \; eta \; f(x_1) > f(x_0) \; orduan \; \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0 \; gorakorra$

- Hazkunde eta deribatuaren erlazioa beraz:

$$\boxed{f(x)\, deribagarria\, eta\, gorakorra\, da\, x_0\, puntuan \rightarrow f'(x_0) \geq 0\; izango\; da}$$

$$x_1 > x_0 \; eta \; f(x_1) < f(x_0) \; orduan \; \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0 \; beherakorra$$

Funtzio beherakorra:

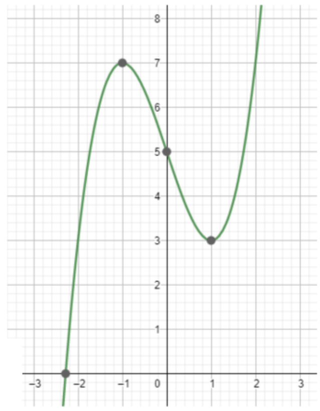
- Hazkunde eta deribatuaren erlazioa beraz:

$$\boxed{f(x)\, deribagarria\, eta\, beherakorra\, da\, x_0\, puntuan \rightarrow f'(x_0) \leq 0\; izango\; da}$$

Zeinutik abiatuta hazkundea definitu daiteke:

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x_0) > 0 \;\rightarrow f\; gorakorra\; de\; x_0\; puntuan \\ f'(x_0) < 0 \;\rightarrow f\; beherakorra\; de\; x_0\; puntuan \end{array}}$$

Aztertu $f(x)=x^3-3x+5$ hazkundea $x_1=-1$ eta $x_2=1$ puntuen inguruan



<u>Deribatuaren zeinua erabiliko dugu:</u> $f'(x)=3x^2-3$

> x_0 puntuan maximoa badago:
>
> — Deribatua x_0 puntuan, ezkerretik, 0 edo 0 baino handiagoa da.
>
> — Deribatua x_0 puntuan, eskuinetik, 0 edo 0 baino txikiagoa da.
>
> Beraz, deribatua x_0 puntuan 0 da.
>
> Eta antzekoa gertatzen da minimoekin ere.

$x_1=-1$ puntuaren inguruan

- Ezkerretik $x=-1.1$
  - $f'(-1.1)=3(-1.1)^2-3$ >0 Gorakorra
- Eskumatik $x=-0.9$
  - $f'(-0.9)=3(-0.9)^2-3$ <0 Beherakorra

$x_1=-1$ → MAXIMOA

$x_2=1$ puntuaren inguruan

- Ezkerretik $x=0.9$
  - $f'(0.9)=3(0.9)^2-3$ >0 Beherakorra
- Eskumatik $x=1.1$
  - $f'(1.1)=3(1.1)^2-3$ >0 Gorakorra

$x_2=1$ → MINIMOA

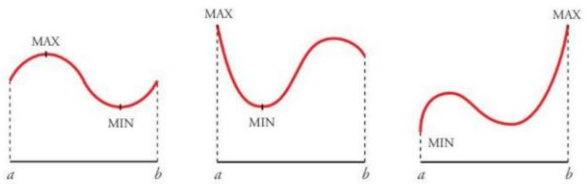
3. FUNTZIO BATEN MAXIMO ETA MINIMO ERLATIBOAK (273orr)

MAXIMO ERLATIBOA x_0 PUNTUAN

- $x<x_0$ Gorakorra
- $x>x_0$ Beherakorra

MINIMO ERLATIBOA x_0 PUNTUAN

- $x<x_0$ Beherakorra
- $x>x_0$ Gorakorra



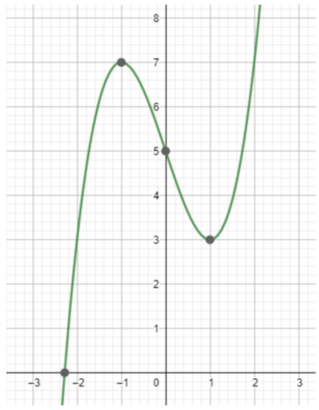
Puntu singularrak

Ukitzaile horizontalko puntuei, hau da, $f'(x)=0$ betetzen duten puntuei **puntu singular** edo **puntu kritiko** esaten zaie.

Puntu singular bat izan daiteke:

maximoa	f gorakor izatetik beherakor izatera igarotzen da
minimoa	f beherakor izatetik gorakor izatera igarotzen da
inflexio-puntua	ez dago aldaketarik hazkundean

Maximo edo minimoak aurkitzeko **$f'(x)=0$** egiten den puntuetan, zuzen ukitzailearen **malda 0** den puntuetan:



$f(x)=x^3-3x+5 \rightarrow f'(x)=3x^2-3$

Noiz da zuzen ukitzailearen malda 0?

$f'(x)=0= 3x^2-3$

$3x^2-3=0$

$3(x^2-1)=0$

$3(x-1)(x-1)=0$

$x_1=-1$ eta $x_2=1$

f(x) deribagarria denez $x_1=-1$ eta $x_2=1$ puntuetan

maximoa/minimoa –k egondo dira $x_1=-1$ eta $x_2=1$ puntuetan

297.orr

11 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

297.orr

10 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ → c) $y = x^4 - 2x^3$

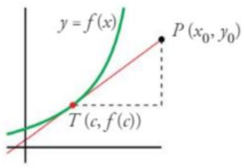
d) $y = x^4 + 2x^2$ e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ → f) $y = e^x(x-1)$

ADIBIDEA:

P(2,-7) puntutik igarotzen den $y=x^2-5x+3$ **kurbarekiko zuzen ukitzailea:**

$y'=2x-5$

PLANTEATU: BI PUNTUEN ARTEKO MALDA ETA DERIBATUA PUNTUAN, ETA BERDINDU



1) Deribatua $x_0=c$ puntuan:

$f'(x) = 2x-5$

$\boxed{f'(c) = 2c-5}$

2) Malda P eta T puntuen artean

$m = \dfrac{-7-f(c)}{2-c} = \boxed{\dfrac{-7-(c^2-5c+3)}{2-c}}$

3) Berdindu maldak = deribatua$(x_0=c)$.

$2c-5 = \dfrac{-7-c^2+5c-3}{2-c}$

$(2c-5)(2-c) = -c^2+5c-10$

$4c-2c^2-\cancel{10}+\cancel{5c} = -c^2+\cancel{5c}-\cancel{10}$

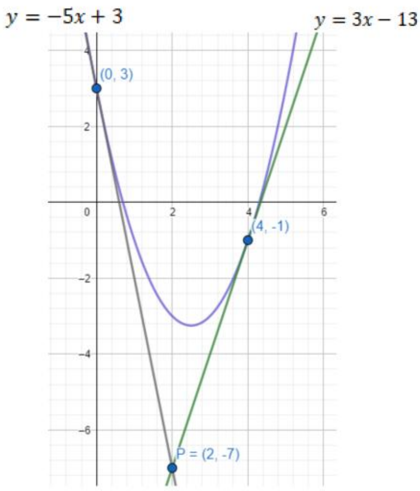
$0 = c^2-4c$ < $\boxed{c_1=4} \to f(4)=4^2-5\cdot4+3=-1$ $\boxed{P(4,-1)}$; $\boxed{c_2=0} \to f(0)=0^2-5\cdot0+3=3.$ $\boxed{P(0,3)}$

Deribatuak P_1 eta P_2 → Berez ukitzailea ekuazioa

$P(4,-1) \to \boxed{f'(4)=2\cdot4-5=3.}$

$P(0,3) \to \boxed{f'(0)=2\cdot0-5=-5}$

$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= -1+3(x-4) \\ y_2 &= 3-5(x-0) \end{aligned}}$



Liburutik 279orr. 1 d),
293) 7, 8
292) 2 (ebatzita) eta egin zeuk

292.orr

Kanpoko puntua

2. Kanpoko puntu batetik igarotzen den ukitzailea

Honako kurba hau izanik,

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

aurkitu zer puntutan izango duen $P(-3, 2)$ puntutik ere igarotzen den zuzen ukitzailea.

- Ukitze-puntuaren koordenatuak hauek dira: $x = a,\ f(a) = \dfrac{1}{a-1}$.

  $x = a$ puntuko zuzen ukitzailearen malda $f'(a) = \dfrac{-1}{(a-1)^2}$ da.

- $P(-3, 2)$ puntutik eta $\left(a, \dfrac{1}{a-1}\right)$ ukitze-puntutik igarotzen den ukitzaile-zuzenkiaren malda $f'(a)$ izango da.

  Beraz: $\dfrac{\dfrac{1}{a-1} - 2}{a+3} = \dfrac{-1}{(a-1)^2} \to \dfrac{-2a+3}{(a-1)(a+3)} = \dfrac{-1}{(a-1)^2} \to \dfrac{-2a+3}{a+3} = \dfrac{-1}{a-1}$

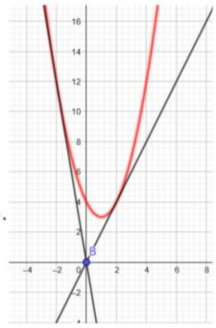
  $(-2a+3)(a-1) = -(a+3) \to -2a^2 + 6a = 0 \to a = 0;\ a = 3 \to f(0) = -1;\ f(3) = \dfrac{1}{2}$

  Bi zuzen ukitzaileri dagozkien bi ukitze-puntu daude:

  - $x = 0;\ f(0) = -1;\ f'(0) = -1 \to y = -1 - x$
  - $x = 3;\ f(3) = \dfrac{1}{2};\ f'(3) = -\dfrac{1}{4} \to y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-3)$

292.Orr Kanpoko puntua

Egizu zeuk. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ kurba izanik, aurkitu zer puntutan izango duen koordenatuen jatorritik ere igarotzen den zuzen ukitzailea.



Los puntos de tangencia están en la curva y son de la forma $(a, a^2 - 2a + 4)$.

La pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia y por el origen de coordenadas es $\dfrac{a^2 - 2a + 4 - 0}{a - 0}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente será $f'(a) = 2a - 2$.

Por tanto, $\dfrac{a^2 - 2a + 4}{a} = 2a - 2 \rightarrow a^2 - 2a + 4 = 2a^2 - 2a \rightarrow a = -2,\ a = 2.$

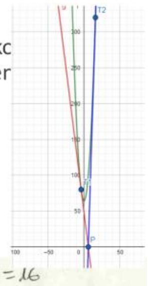
Hay dos puntos de tangencia que corresponden a dos rectas tangentes:

$x = -2,\ f(-2) = 12,\ f'(-2) = -6 \rightarrow y = 12 - 6(x + 2)$

$x = 2,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 2 \rightarrow y = 4 + 2(x + 2)$

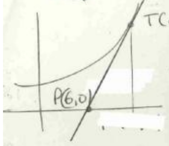
SELEKTIBITATEA: 2019 EKAINA

Izan bitez $f(x)=x^2+64$ funtzioa eta P(6,0) f-ren grafikoarekikc **kanpoko puntua**. Aurkitu P puntutik pasatzen d(ir)en zuzer ukitzailea(k).



T(c, f(c)) izango da funtzioaren ukitze puntua

- Bi puntuen arteko $\boxed{\text{malda}}$ $m = \dfrac{f(c)-0}{c-6} = \dfrac{c^2+64-0}{c-6}$



- $\boxed{\text{Deribatua}}$ $x_0 = c$ puntuan:

$f'(x) = 2x$

$f'(c) = 2c$

- Berdindut

$\boxed{\dfrac{c^2+64}{c-6} = 2c}$

$c^2+64 = 2c(c-6)$

$c^2+64 = 2c^2-12c$

$0 = c^2-12c-64.$

$c = \dfrac{12 \pm \sqrt{12^2-4\cdot1\cdot(-64)}}{2\cdot1} = \dfrac{12\pm20}{2} = \begin{cases} c_1 = 16 \\ c_2 = -4 \end{cases}$

- kalkulatzen dugu f(c) eta f'(c) bi puntuetan

$\boxed{c_1 = 16} \rightarrow f(16) = 16^2+64 = \underline{320} \rightarrow f'(16) = 2\cdot16 = \underline{32}$

$\boxed{c_2 = -4} \rightarrow f(-4) = 4^2+64 = \underline{80} \rightarrow f'(-4) = 2(-4) = \underline{-8}$

- Ukitzaileen ekuazioak:

$y_1 = 320 + 32(x-16)$

$y_2 = 80 - 8(x+4)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1 = 32x - 192 \\ y_2 = -8x + 48 \end{array}}$

Adibidez:

x+2y=0 zuzenarekiko paraleloa den y=sin(x) funtzioaren zuzen ukitzailea, x∈ [-π,π]

y=-x/2 zuzena ematen digute beraz $m = -\frac{1}{2}$

Zuzen ukitzailea: $y = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$

- Ariketa honetan moldo emoten dabe $x+2y=0$ zuzenaren paraleloak direlako

$y = -x/2 \longrightarrow \boxed{m = -1/2}$

- kalkulatu behar dira zein x_0 puntu/puntuetan $f'(x_0) = -1/2$ dan:

$f(x) = \sin x$

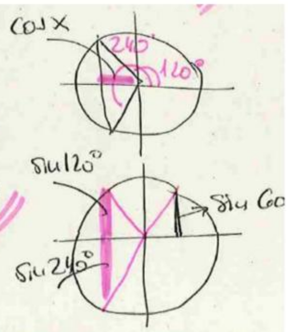
$f'(x) = \cos x$ $\quad \cos x = -1/2$ $\begin{cases} x_1 = 120° = \frac{2\pi}{3} \\ x_2 = 240° = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$

- kalkulatzen dugu:

$f(x_1)$ eta $f(x_2)$

$f(x_1) = \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

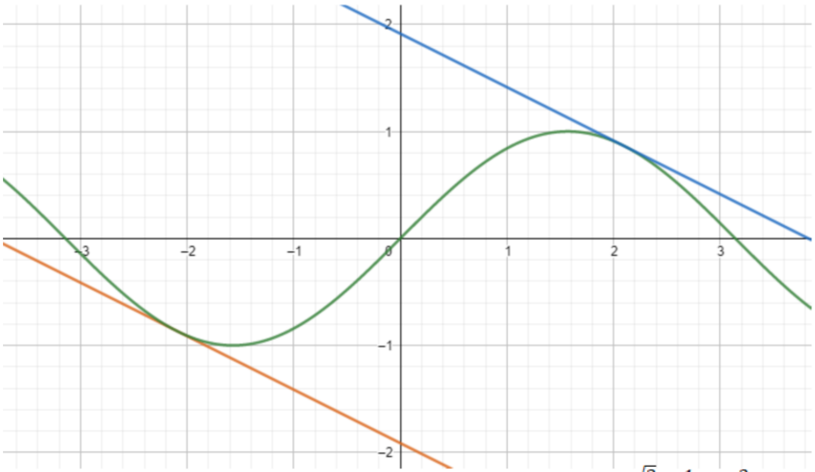
$f(x_2) = \sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



- Beraz zuzenaren ekuazioa

$y = y_0 + m(x - x_0)$

$m = -\frac{1}{2}$ $\begin{cases} P_1\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \longrightarrow y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \\ P_2\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \longrightarrow y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$

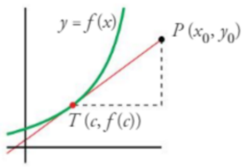


$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Liburutik 279orr. 1 c)

1. 3 *KURBA BATEKIKO UKITZAILEA KANPOKO PUNTU BATETI*



$P(x_0,y_0)$ kurbatik kanpo dagoen puntu bat eta kurba emango dizkigute.

Puntutik $P_0(x_0,y_0)$ pasatzen den eta kurba ukitzen duen $P_1(x_1,y_1)$ zuzenaren malda kalkulatu dezakegu.

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

PLANTEATU: BI PUNTUEN ARTEKO MALDA ETA DERIBATUA PUNTUAN, ETA BERDINDU

$P_1(x_1,y_1)$ koordenatuak ematen diguten kurbatik aterako ditugu:

Ukitze puntua esagutzen ez dugun c izanik $P_1(c,f(c))$ beraz malda :

$$m = \frac{f(c) - y_0}{c - x_0}$$

Funtzio baten deribatua puntu baten bere zuzen ukitzailearen malda denez:

$$f'(c) = \frac{f(c) - y_0}{c - x_0}$$

1. KURBA BATEKIKO ZUZEN UKITZAILEA (3 KASU)

1.1 OINARRIZKO KASUA: **Aurkitu $y=f(x)$ funtzioaren ukitzailea, $x=x_0$ absiza-puntuan**

Zuzen ukitzailearen ekuazioa: $y = y_0 + m(x - x_0)$

(puntu malda ekuazioa)

- Puntuaren ordenatu: $y_0 = f(x_0)$
- Funtzio baten zuzen ukitzailearen malda, bere deribatua puntu horretan: $m = f'(x_0)$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

ADIBIDEA: Kalkulatu $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 3}$ **funtziaren $x_0=3$ puntuan duen zuzen ukitzailearen ekuazioa.**

Zer lortu behar dugu? $y=y_0+m(x-x_0)$ → $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

Zuzen ukitzailearen malda deribatuaren balioa x_0 puntuan dela jakinik.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+3) - 1(x^2-2x)}{(x+3)^2}$$

$$f'(3) = \frac{4 \cdot 6 - 3}{6^2} = \frac{7}{12}, \textit{beraz zuzen ukitzailearen malda } \frac{7}{12} \textit{ da}$$

$$f(x) = y_0 + \frac{7}{12}(x-3)$$

$f(x_0)=y_0$-ren balioa falta da, hau da funtzioaren balio $x_0=3$ denean. $f(3) = \dfrac{3^2 - 2 \cdot 3}{3+3} = \dfrac{1}{2}$

Soluzioa: $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{12}(x-3)$

292.Orr Puntu batetik

Egizu zeuk. Idatzi $y = \frac{1}{x}$ kurbak $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ koordenatuak dituen puntuan daukan zuzen ukitzailearen ekuazioa.

Egiaztatu ukitze-puntuak bi zati berdinetan erdibitzen duela koordenatu-ardatzen artean dagoen zuzen horretako zuzenkia.

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$x = 3 \rightarrow y' = -\frac{1}{9} \rightarrow$ La recta es tangente es $y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$

La recta corta a los ejes en los puntos:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(-3) = \frac{2}{3}$$

$$y = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) \rightarrow x = 6$$

Si $P\left(3, \frac{1}{3}\right)$; $Q\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $R(6, 0)$.

El punto medio del segmento $\overline{QR}$ es $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{\frac{2}{3}+0}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right) = P$.

Por tanto, P divide al segmento en dos partes iguales.

1.2 *y=f(x) KURBA BATEKIKO UKITZAILEA MALDA JAKINDA*

Zuzen ukitzailearen **malda (m) ezagutzen** dugu baina ez dakigu zein puntutan dan.

f'(x) = m ebatziko dogu x_0 lortzeko.

Nola emongo da malda?

- 1. Batzuetan zuzen ukitzailea, beste zuzen batekiko paraleloa izango da. Kasu honetan malda bardinak izango dira.
- 2. Batzuetan zuzen ukitzailea, beste zuzen batekiko perpendikularra izango da. Kasu honetan malden arteko bierketa -1 da.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

- 3. Batzuetan zuzen ukitzaileak OX ardatzagaz sortzen dauan angelua emoten da.

$$m = tg \propto$$

- 4. Bestetan zuzen ukitzailea ardatz batekiko paraleloa edo perpendikularra dala esaten da. Kasu hauetan, malda 0 edo infinito izango da. Infinito bada , ukitzailea zuzen bertikal bat iizango da

SELEKTIBITATEA: 2010 EKAINA

ARIKETAK:
297ORR. 1→9

Idatzi y=10x+2 zuzenarekin paraleloak diren eta $f(x)=4x^3-2x+1$ kurbaren ukitzaileak diren zuzenen ekuazioak. Aztertu f funtzioaren maximo eta minimoak.

$f(x)=4x^3-2x+1$. $\quad y=10x+2$.

UKITZAILEAREN MALDA : $m=10$ emandako zuzenaren paraleloa dalako

Kalkulatuko dogu zein x_0-rentzako $f'(x_0)=10$ dan:

$f'(x)=12x^2-2$

$f'(x_0)=10 \longrightarrow 10=12x^2-2$

$12x^2=12$

$\boxed{x=\pm 1}$

- Bi puntu dogoz, non zuzen ukitzailearen malda 10 dan

$x_1=1 \quad y_1=f(1)=4\cdot1^3-2\cdot1+1=3 \quad \boxed{P(1,3)}$

$x_2=-1 \quad y_2=f(-1)=4(-1)^3-2(-1)+1=-1 \quad \boxed{P(-1,-1)}$

- Zuzen ukitzaileak:

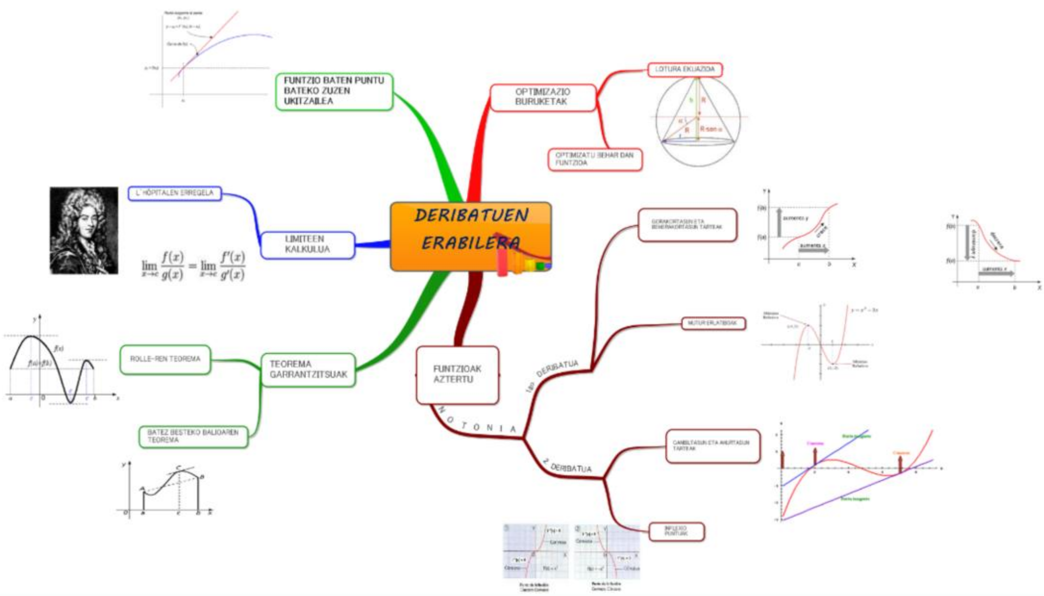
$y_1=3+10(x-1)$

$y_2=-1+10(x+1)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_1=10x-7 \\ y_2=10x+9 \end{array}}$

10.DERIBATUEN ERABILERAK

2025-2026



10. DERIBATUEN ERABILERA

- 1. KURBA BATEKIKO ZUZEN UKITZAILEA (279.orr 1.ariketa, 297)1→9
  - 1.1 Oinarrizko kasua
  - 1.2y=f(x) kurba batekiko ukitzailea, malda jakinda
  - 1.3 Kurba batekiko ukitzailea, kanpoko puntu batetik
- 2. FUNTZIO BATEN HANDIAGOTZEA ETA TXIKIAGOTZEA PUNTU BATEAN (283) 1 eta 2, 297) 10.c-d-f , 11.a-d-f , 12. B-d-e-f) 271)11
- 3. PUNTU SINGULARRAK:MAXIMO ETA MINIMO ERLATIBOAK 297)13,14
- 4. BIGARREN DERIBATUKO INFORMAZIOA, AHURATSUNA ETA GANBILTASUNA 297) 12
- 5. FUNTZIO BATEN KOEFIZIENTEAK 298) 17`tik 27-ra
- 6. OPTIMIZAZIOA

4. AHURTASUN ETA GANBILTASUNA

A) AHURRA: f ahurra x_0 puntuan: $f'(x)$ gorakorra eta $f''(x_0) > 0$

B) GANBILA : f ganbila x_0 puntuan: $f'(x)$ beherakorra eta $f''(x_0) < 0$

C) INFLEXIO PUNTUAK

   a. $f''(x_0) = 0$ eta $f'''(x_0) \neq 0$

   b. Ahurtasun tarte batetik ganbiltasunera igarotzean edota ganbiltasunetik ahurtasunera.

5. FUNTZIOEN OPTIMIZAZIOA

A) Maximizatu edo minimizatu egin behar dan funtzioa lortu.
Emoten diran datu guztiak erabili eta erlazionatu.

B) Funtzioaren $f'(x)$ kalkulatu.

C) $f'(x)=0$ egin eta x askatu. Balioak interpretatu eta zentzugabeko balioak baztertu.

D) Egiaztatu lortutako x_0 maximo edo minimo bat dala. Bi aukera:

   a. Gorakor-beherakor tarteekaz.

   b. $f''(x_0)$ kalkulatuz.

9. GAIA: DERIBATUEN APLIKAZIOAK – LABURPENA

1. KURBA BATEN ZUZEN UKITZAILEA PUNTU BATEAN

x_0 puntuan $f(x)$ funtzioaren zuzen ukitzailearen ekuazioa kalkulatzeko:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- $x_0 =$ puntu zehatz bat x ardatzean. Esate baterako: $x_0 = 1$
- $f(x_0) =$ funtzioaren irudia x_0 puntuan.
- $f'(x_o) =$ funtzioaren deribatua egin ondoren, x_0 balioa funtzio deribatuan ordezkatzerakoan lortzen dogun balioa. Geometrikoki zuzenaren malda ematen dau eta zuzen baten ekuazioan x aldagaiaren koefizientea da.

2. GORAKORTASUN BEHERAKORTASUN TARTEAK

A) $f'(x_o) > 0 \rightarrow f(x)$ gorakorra da x_0 puntuan

$f'(x)$ kalkulatu eta x_0 balioa deribatuan ordezkatu. Lortutako balio positiboa bada, $f(x)$ gorakorra.

B) $f'(x_o) < 0 \rightarrow f(x)$ beherakorra da x_0 puntuan

$f'(x)$ kalkulatu eta x_0 balioa deribatuan ordezkatu. Lortutako balio negatiboa bada, $f(x)$ beherakorra.

3. MAXIMO ETA MINIMO ERLATIBOAK

A) MAXIMOA: (Bi aukera)

i. $f'(x_0) = 0$ eta $f''(x_0)$<0

ii. $f'(x_0) = 0$ eta $f'(x_o) > 0$ bere ezkerretara eta $f'(x_o) < 0$ bere eskumara. Hau da, gorakorra ezkerrera eta beherakorra eskumara.

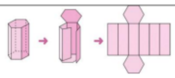
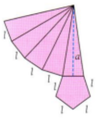
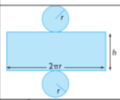
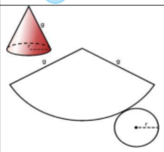
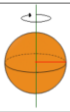
B) MINIMOA: (Bi aukera)

i. $f'(x_0) = 0$ eta $f''(x_0) > 0$

ii. $f'(x_0) = 0$ eta $f'(x_o) < 0$ bere ezkerretara eta $f'(x_o) > 0$ bere eskumara. Hau da, beherakorra bere ezkerrera eta gorakorra bere eskumara.

FUNTZIOEN ADIERAZPEN GRAFIKOA

Eremua / Definizio eremua		$Dom(f)=\{x\in R / \exists f(x)\}$
Ibilbide edo Irudia		$\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\in R / x\in Dom(f)\}$
Ardatzekiko ebaketak	X ardatzekiko	(x,0) puntuak y = f(x) = 0 ekuazio ebatzi
	Y ardatzekiko	(0,y) puntuak y = f(x) ekuazioan, x = 0 eginez
Simetria	Y ardatzarekiko	f(-x) = f(x) $x\in Dom(f)$ betetzen bada
	Jatorriarekiko	f(-x) = - f(x) $x\in Dom(f)$ betetzen bada
Periodikotasuna		f(x) = f(x + p) $x\in Dom(f)$ betetzen bada
Asintotak	Bertikalak: x = a	$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$
	Horizontalak: y = b	$\lim_{x\to \infty} f(x)=b$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)=b$
	Zeiharrak: y = mx + n Edo Zatiketa eginez	$m=\lim_{x\to\infty} {f(x)}/{x}$; $n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$
Monotonia	Gorakorra	$x\in Dom(f)$ / $f'(x)>0$
	Beherakorra	$x\in Dom(f)$ / $f'(x)<0$
Mutur erlatiboak	Maximo	$x\in Dom(f)$ / $f'(x)=0$ *eta* $f''(x)<0$
	Minimo	$x\in Dom(f)$ / $f'(x)=0$ *eta* $f''(x)>0$
Kurbadura	Ahurtasuna	$x\in Dom(f)$ / $f''(x)>0$
	Ganbiltasuna	$x\in Dom(f)$ / $f''(x)<0$
Inflexio puntuak		$x\in Dom(f)$ / $f''(x)=0$ *eta* $f'''(x)\neq 0$

		AZALERA	BOLUMENA
PRISMA		$A_{guztia} = A_{albokoa} + 2\ A_{oinarria}$	$V = A_{oinarria}\ h$
PIRAMIDE		$A_{guztia} = A_{albokoa} + A_{oinarria}$	$V = (A_{oinarria}\ h)\ /3$
ZILINDROA		$A_{guztia} = A_{albokoa} + 2\ A_{oinarria}$ $A_{albokoa} = 2\ \pi\ r\ h$ $A_{oinarria} = \pi\ r^2$	$V = A_{oinarria}\ h$
KONOA		$A_{guztia} = A_{albokoa} + A_{oinarria}$ $A_{albokoa=}\ \pi\ r\ g$ $A_{oinarria=}\ \pi\ r^2$	$V = (A_{oinarria}\ h)\ /3$
ESFERA		$A = 4\ \pi\ r^2$	$V = (4\ \pi\ r^3)\ /3$