2.3 CÁLCULO DEL LÍMITE EN UN PUNTO EN EL QUE LA FUNCIÓN ES CONTINUA

Si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Las funciones que utilizamos habitualmente mediante su expresión analítica son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

POR TANTO $\Longrightarrow$

Si $f(x)$ es una función habitual dada por su expresión analítica y existe $f(c)$, entonces para hallar:

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

calcularemos, sencillamente:

$$f(c)$$

EJERCICIO RESUELTO

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right)$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{-2x + 9}$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x - 5}$ ***c)*** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

RESOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right) = \frac{2}{3} \cdot 1^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{-2x + 9} = \sqrt{-2 \cdot 0 + 9} = \sqrt{9} = 3$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x - 5}$. No tiene sentido, la x no puede tomar valores "cada vez más próximos a 1".

d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Aunque $x = 2$ no sea del dominio de la función $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$, sí podemos tomar puntos del dominio tan próximos a 2 como queramos. Recordaremos en la página 28 cómo se halla este tipo de límites.

1 Halla los siguientes límites en los casos en los que sea posible:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^3 - \frac{1}{2}x + 3\right) =$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} =$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} =$ d) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 9} =$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 9} =$ f) $\lim\limits_{x \to 0} e^x =$ g) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$ h) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (1 + sen\ x) =$

i) $\lim\limits_{x \to 2} [\log_3 (x + 1)] =$ j) $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 =$ k) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x}\right)^3 =$ l) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

m) $\lim\limits_{x \to -1} (\log x) =$ n) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{x}\right)^x =$ ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} =$ o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$

p) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2} =$ q) $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$ r) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x + 1} =$ s) $\lim\limits_{x \to 4} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 =$

t) $\lim\limits_{x \to 0,5} (3x^2 - 2x) =$ u) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{1 - x} =$ v) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x^2 - 1) =$ w) $\lim\limits_{x \to 1/2} (\log_2 x) =$

2.5 LÍMITE EN UN PUNTO DEL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS $P(x)/Q(x)$

Al calcular $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$ podemos encontrarnos con uno de estos tres casos:

- Si $Q(c) \neq 0$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$.
- Si $P(c) \neq 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ (hallamos los límites laterales).
- Si $P(c) = 0$ y $Q(c) = 0$, entonces $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x-c)\,P_1(x)}{(x-c)\,Q_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

  (Para hallar este nuevo límite, analizamos en cuál de los tres casos es encuentra).

EJERCICIO RESUELTO

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x^2-2x}$ **b)** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x-2}$ **c)** $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-2x}{x^2+x}$ **d)** $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

RESOLUCIÓN

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \frac{3^2+1}{3^2-2\cdot 3} = \frac{10}{3}$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x-2} = \frac{5}{(0)} = (\pm\infty)$. Hallamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = -\infty$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = +\infty$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-2x}{x^2+x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2-2)}{x(x+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-2}{x+1} = \frac{-2}{1} = -2$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)}{(x+2)} = \frac{4}{3}$

---

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{2x}{x+2} =$ b) $\lim_{x \to -4} \frac{1}{x+4} =$ c) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+3} =$ d) $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} =$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} =$ f) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2-3x}{3x^2+2x} =$ g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} =$ h) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{3x^3+x^2} =$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{3x}{(x-1)^2} =$ j) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)^2} =$ k) $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-2x-3} =$ l) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} =$

m) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2+4x+4} =$ n) $\lim_{x \to 0} \frac{3x+1}{x^2+2x} =$ ñ) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 =$ o) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} =$

p) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{2x-10} =$ q) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} =$ r) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x+1} =$ s) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-4x^2+x-2} =$

2.8 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$ O $x \to -\infty$. FUNCIONES RACIONALES: $P(x)/Q(x)$

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$$

- Si grado de $P >$ grado de Q $(m > n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\left(\text{el signo es el de } \frac{a}{b}\right)$.
- Si grado de $P <$ grado de Q $(m < n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Si grado de $P =$ grado de Q $(m = n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a}{b}$.

■ Cuando $x \to -\infty$, se resuelve de forma similar a cuando $x \to +\infty$, teniendo en cuenta la regla de los signos.

EJERCICIO RESUELTO

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{3x - x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3}{x^2}\right)^2$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4 - 3x^4}{(1 + x^2)^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 4}{x + 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x^3}$ **g)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x + 4}$ **h)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 + 1}$

RESOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} = \frac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{3x - x^2} = 0$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3}{x^2}\right)^2 = +\infty$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} = \frac{4 - 3x^4}{(1 + x^2)^2} = -3$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 4}{x + 3} = 2$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4}{2x^2 + x^3} = 0$ g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x + 4} = -\infty$ h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 + 1} = -\infty$

---

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x + 1}{1 - 2x} =$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4x}{x^2 + 3x} =$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 4} =$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x + 1)(x - 1)}{4x - 1} =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(x + 2)}{3 - x^2} =$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{4x - 1}\right)^2 =$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x + 9}{x(x - 2)} =$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^5 - 2x + 5}{x^4 + 2x} =$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2 + 1} =$ j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2 - 3x}{3 - 2x} =$ k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} =$ l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} =$

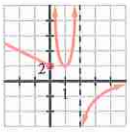
m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{(x + 2)^2} =$ n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^3}{2x^2 - 1} =$ ñ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x}{2x + 4} =$ o) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 + 2x}{4x - 1} =$

p) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{4 - x} =$ q) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 3}{x} =$ r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x + 1)^2}{x^2 - 1} =$ s) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x(x + 1)}{2x^2} =$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x}{(1 - x)^3} =$ u) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x + 1}{2}\right)^2 =$ v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x + 1}{2}\right)^3 =$ w) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{3x + 2} =$

Página 25

1. a) 1 b) -1 c) No existe
 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 0
 g) $+\infty$ h) -1 i) -1
 j) -1 k) 2 l) $+\infty$
 m) 3 n) $+\infty$

2. 

Página 26

1. a) 57/2 b) $-1/2$ c) 0
 d) 5 e) No existe f) 1
 g) 0 h) 2 i) 1
 j) 9 k) 1/8 l) 1/8
 m) No existe n) 1/27 ñ) 1/4
 o) 9/4 p) 4/3 q) $-3/2$
 r) 0 s) 196 t) $-0{,}25$
 u) No existe v) 1 w) -1

Página 27

1. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -4$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13$

2. a) 11 b) No existe c) 4

3. a) $k = 4$ b) 

Página 28

1. a) -2

 b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

 c) 0 d) 3/5 e) 0 f) $-3/2$

 g) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

 h) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

 i) $+\infty$ j) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

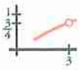
 k) 1/2 l) $+\infty$

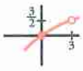
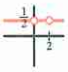
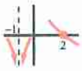
 m) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

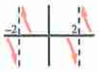
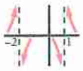
 n) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

 ñ) $+\infty$ o) 1/2 p) 5 q) 5/2 r) 0 s) 0

Página 29

2. a)  b) 
 c) 

3. a)  b) 
 c)  d) 

4. a)  b) 
 c)  d) 

Página 30

1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$
 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
 c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. a)  b) 
 c)  d) 

Página 31

1. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $-\infty$
 e) $+\infty$ f) 0 g) 0 h) 0
 i) $-\infty$ j) $+\infty$ k) $-\infty$ l) $+\infty$
 m) $-\infty$ n) 0 ñ) 0

Página 32

1. a) $-3/2$ b) $+\infty$ c) 1 d) $+\infty$
 e) -1 f) 1/4 g) 0 h) $+\infty$
 i) 0 j) 3/2 k) 0 l) 2
 m) 0 n) $-\infty$ ñ) $-3/2$ o) 1/2
 p) 0 q) 2 r) 1 s) 1/2
 t) 0 u) $+\infty$ v) $-\infty$ w) 2/3

Página 33

1. a) 1 b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$
 e) No existe f) 2 g) 3 h) 3
 i) 0 j) 0 k) $+\infty$ l) $+\infty$
 m) $-\infty$ n) 2 ñ) 2 o) -2