3.4 REGLA DE L'HÔPITAL

REGLA DE L'HÔPITAL

Sean f y g funciones derivables en un entorno $(a - r,\ a + r)$ del punto a.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, y existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

y es: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula estos límites, aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^3 - 4x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\text{sen}\, x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^x}{x^3 - 3x^2}$

RESOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x + 2}{3x^2 - 8x + 3} = \dfrac{6}{-2} = -3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\text{sen}\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^x}{x^3 - 3x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x + x^2)\, e^x}{3x^2 - 6x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 + 4x + x^2)\, e^x}{6x - 6} = \dfrac{-1}{3}$

1 Calcula los siguientes límites, aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^4 + 2x}{x^2 - 3x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{sen}\, x}{x}$ e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^x - 3}{\ln}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{2x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \text{tg}\, x}{x + \text{sen}\, x}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{arc tg}\, x - x + x^3/3}{x^3}$ i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{\ln(x^2 - 3)}$

1 a) $\dfrac{-2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

c) 1

d) 2

e) $3\ln 3$

f) $\dfrac{1}{2}$

g) 1

h) 0

i) $e^2/4$

AMPLIACIÓN DE LA REGLA DE L'HÔPITAL

- Los límites del tipo $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde a es $-\infty$, $+\infty$ o un número, si dan lugar a una indeterminación del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ o $\left(\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$, pueden obtenerse derivando numerador y denominador y calculando (si existe) el límite del cociente de sus derivadas.
- Hay expresiones del tipo $(\infty - \infty)$, (1^{∞}) u otras que, con un poco de habilidad, se pueden poner en forma de cociente para que se pueda aplicar la relga de L'Hôpital.

EJERCICIO RESUELTO

Calcula los siguientes límites, aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(e^{1/x} - 1)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \text{sen}\, x)^{1/x}$

RESOLUCIÓN

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} x\,(e^{1/x} - 1) = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{(-1/x^2)\, e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$

c) $$\lim_{x \to 0} (1 + \text{sen}x)^{1/x} = \lim_{x \to 0} (\ln(1 + \text{sen}x)^{1/x}) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1 + \text{sen}x)\right) = \lim_{x \to 0} \frac{lu\,(1 + \text{sen}x)}{x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{1 + \text{sen}x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} (1 + \text{sen}x)^{1/x} = e^1 = e.$$

2 Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (3x)^{-1} \cdot \text{sen}\, x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,(1 - e^{1/x^2})$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$

d)= $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{\text{sen}\, x}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \text{sen}\, x)^{1/x}$

g)= $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$

h) $\lim\limits_{x \to -1} (x+1)^{x+1}$

i) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\text{sen}\, x)^{tg\, x}$

2 a) $\dfrac{1}{3}$ b) -1 c) 0 d) $\dfrac{1}{2}$ e) 0 f) e^{-1} g) 1 h) 1 i) 1