8. LIMITEAK ETA JARRAITASUNA

8. LIMITEAK ETA JARRAITASUNA

1. FUNTZIOEN LIMITEEN IDEIA GRAFIKOA

3. ERAGIKETA ERRAZAK

4.INDETERMINAZIOAK

5. INFINITOEN KONPARAZIOA $x \rightarrow \pm\infty$

6. LIMITEAK $x \rightarrow +\infty$

7. LIMITEAK $x \rightarrow -\infty$

8. JARRAITASUNA

9. LIMITEEN KALKULUA $x \rightarrow c$

10. L´HOPITALEN ERREGELA

11. JARRAITASUNA TARTE BATEAN

1.FUNTZIO BATEN LIMITEA GRAFIKOAN

Zeri deitzen deutsegu funtzio baten limitea x-en balio baterako?

edo

Noiz esaten dogu x-en balio baterako limitea existitzen dela?

DEFINIZIOA:

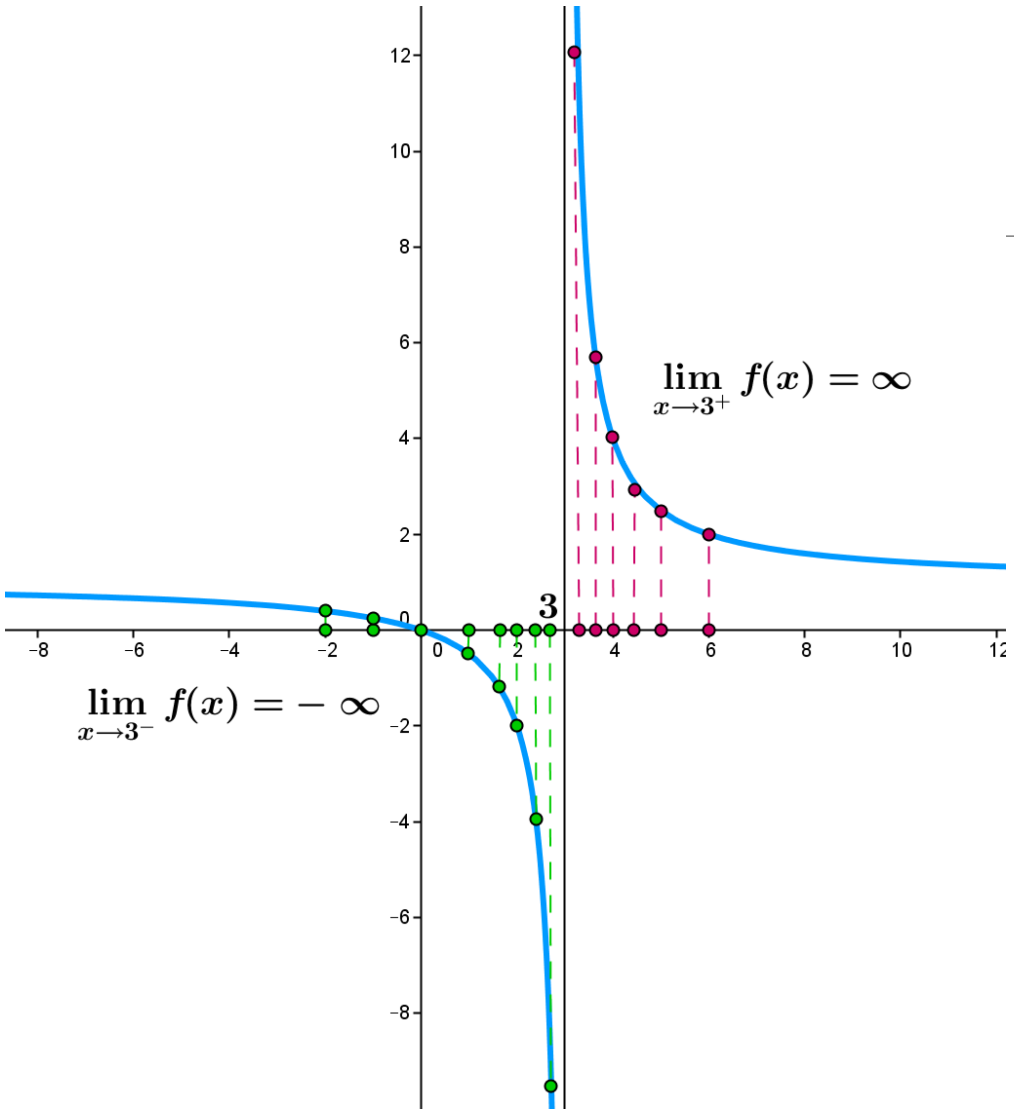
x-en balio baterako funtzioaren limitea existitzen da, x horretara hurbiltzen diren infinitu balioetarako, funtzioak hartzen dabezan baloreak, balio zehatz baterantz hurbiltzen badira.

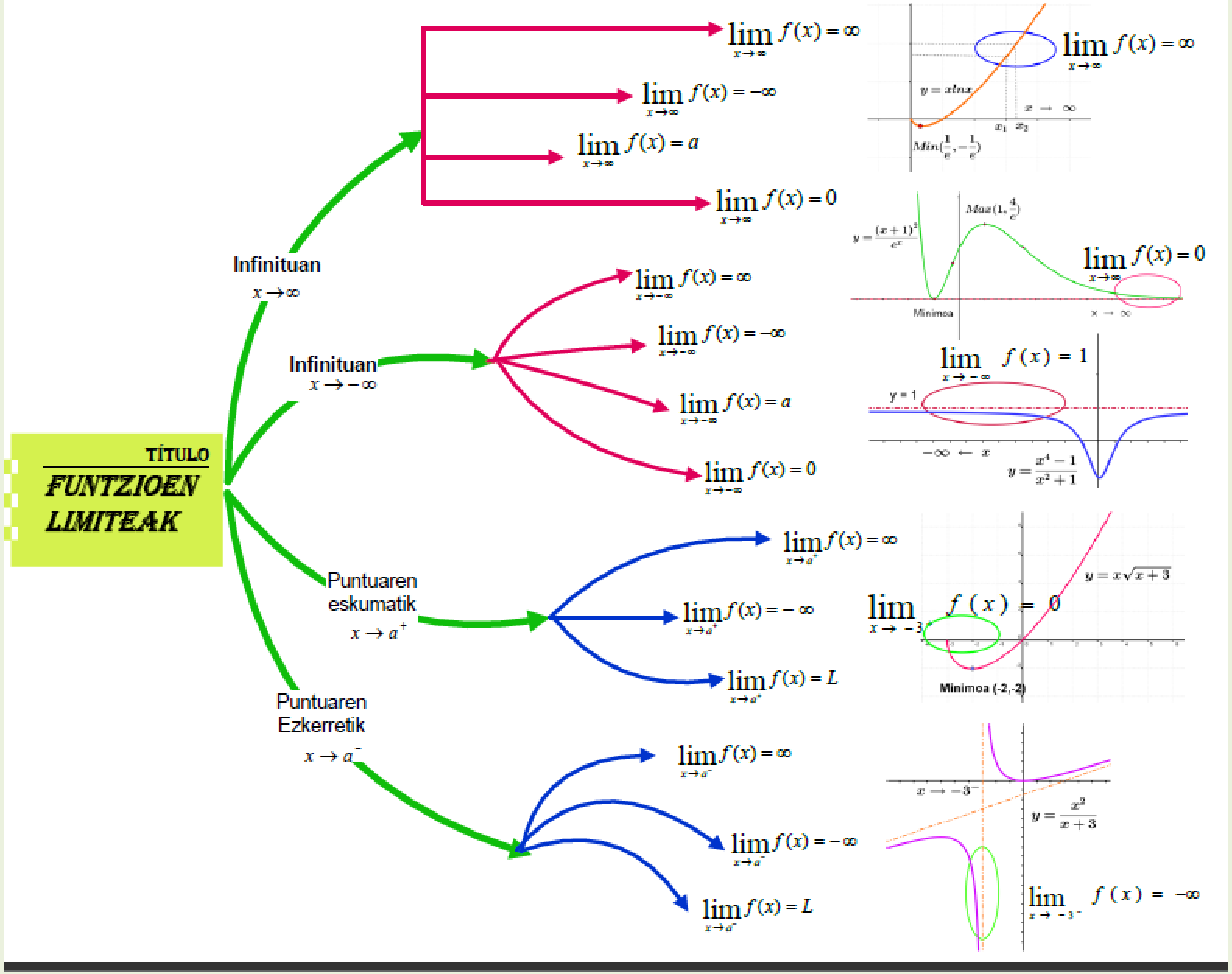
Punturantz ezkerretik eta eskuinetik hurbiltzean funtzioak **BALIO berberara** heltzeko joera badu , funtzioak aztertutako puntuan limitea daukala esan daiteke.
Hau da, **albo-limiteen balioa bardina izan behar dau eta balio finitoa.**

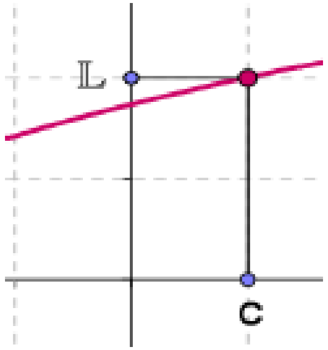
Hau da, **ALBOKO LIMITEAK** existitzen dira eta balio bera dute:

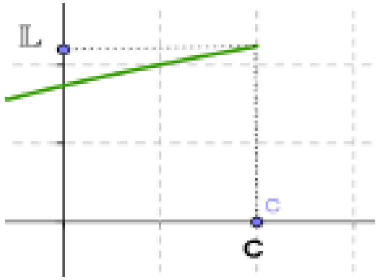
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x\to a} f(x) = l$$

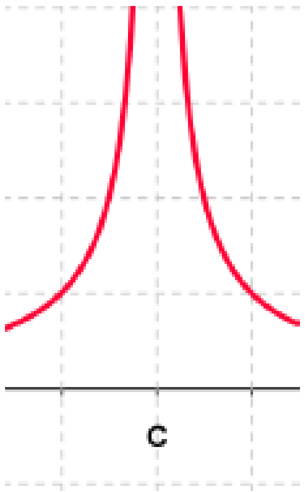
FUNTZIOEN LIMITEEN ADIERAZPEN GRAFIKOAK

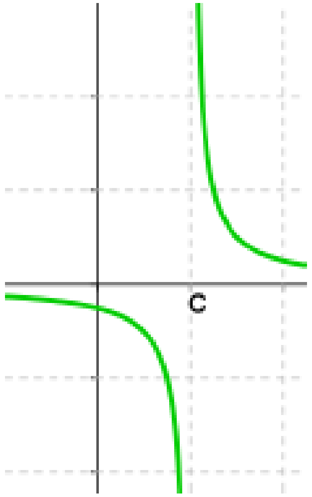


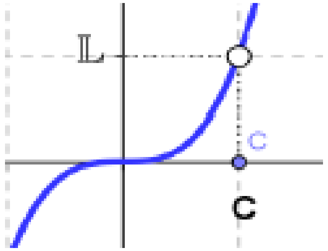

TÍTULO
FUNTZIOEN LIMITEAK
Infinituan $x \to \infty$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
$y = x\ln x$
$x \to \infty$
$Min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$
$Max(1, \frac{4}{e})$
$y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$
Minimoa
Infinituan $x \to -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
y = 1
$-\infty \leftarrow x$
$y = \frac{x^4-1}{x^2+1}$
Puntuaren eskumatik $x \to a^+$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
$y = x\sqrt{x+3}$
$\lim_{x\to -3} f(x) = 0$
Minimoa (-2,-2)
Puntuaren Ezkerretik $x \to a^-$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
$x \to -3^-$
$y = \frac{x^2}{x+3}$
$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$

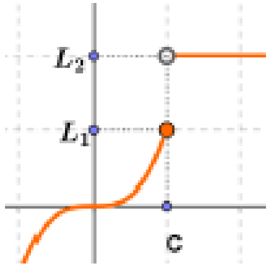
<table>
<tr><th>KASUAK</th><th colspan="2">LIMITEA FINITUA</th><th colspan="2">LIMITEA INFINITUA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">PUNTU BATEAN
$x \to c$</td>
<td>

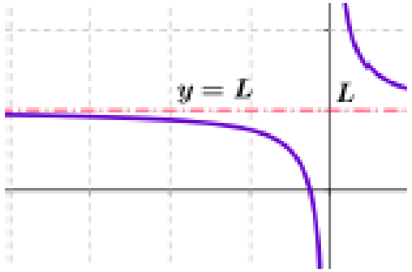
$\lim_{x \to c} f(x) = L$</td>
<td>

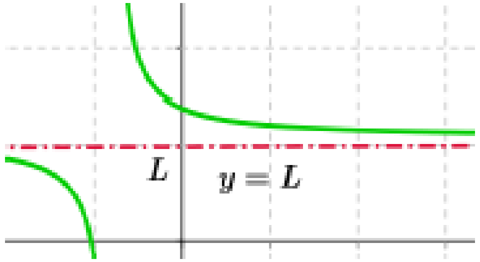
$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$;;; $\lim_{x \to c^+} f(x) = ez$</td>
<td rowspan="2">

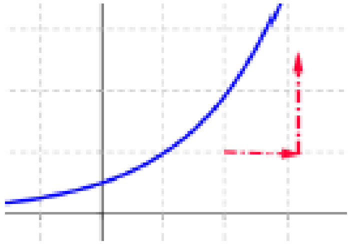
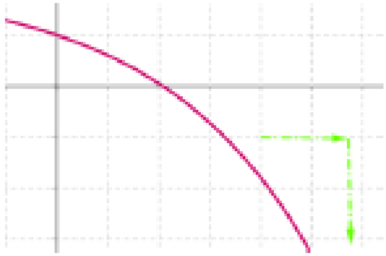
$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$</td>
<td rowspan="2">

$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$</td></tr>
<tr><td>

$\lim_{x \to c} f(x) = L$</td>
<td>

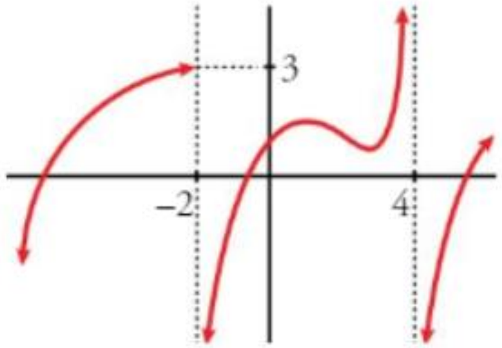
$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$;;; $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$</td></tr>
<tr><td>INFINITUAN
$x \to \pm\infty$</td>
<td>

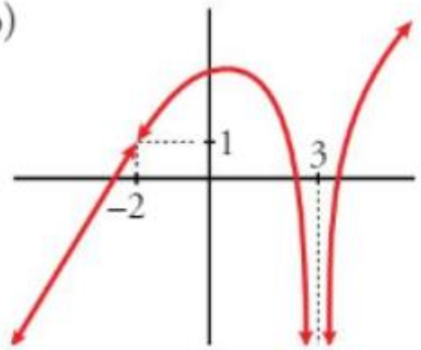
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$</td>
<td>

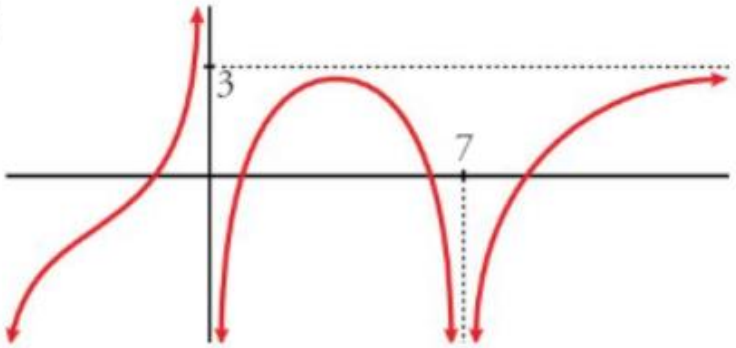
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$</td>
<td>
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$;;;;;;;;</td>
<td>
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$</td></tr>
</table>

215.orr 4
Graf 241.orr 1

4 Deskribatu adar hauen limiteak:







a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

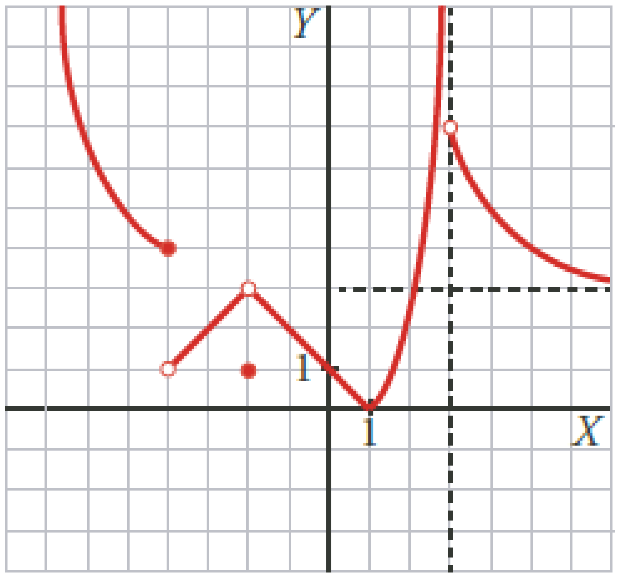
$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

241.orr 1

1 Observando la gráfica de $f(x)$, di el valor de los siguientes límites:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3.1 LIMITEEN ARTEKO ERAGIKETAK

1. $\lim\limits_{x \to \square} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to \square} f(x) + \lim\limits_{x \to \square} g(x) = a + b$

2. $\lim\limits_{x \to \square} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to \square} f(x) - \lim\limits_{x \to \square} g(x) = a - b$

3. $\lim\limits_{x \to \square} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to \square} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \square} g(x) = a \cdot b$

4. $b \neq 0$ bada, $\lim\limits_{x \to \square} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to \square} f(x)}{\lim\limits_{x \to \square} g(x)} = \dfrac{a}{b}$

5. $f(x) > 0$ bada, $\lim\limits_{x \to \square} [f(x)^{g(x)}] = \left[\lim\limits_{x \to \square} f(x) \right]^{\lim\limits_{x \to \square} g(x)} = a^{b}$

6. n bakoitia bada

edo

n bikoitia eta $f(x) \geq 0$ bada

$\rightarrow \lim\limits_{x \to \square} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to \square} f(x)} = \sqrt[n]{a}$

7. $\alpha > 0$ eta $f(x) > 0$ badira, $\lim\limits_{x \to \square} [\log_{\alpha} f(x)] = \log_{\alpha} \left[\lim\limits_{x \to \square} f(x) \right] = \log_{\alpha} a$

3.2 ERAGIKETAK LIMITE INFINITUEKIN

BATUKETAK

$(+\infty) + (l) = (+\infty)$

$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$

$(-\infty) + (l) = (-\infty)$

$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$

$-(-\infty) = (+\infty)$

BIDERKETAK

$(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty)$

$$l > 0 \text{ bada, } \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (+\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (-\infty) \end{cases}$$

$$l < 0 \text{ bada, } \begin{cases} (+\infty) \cdot (l) = (-\infty) \\ (-\infty) \cdot (l) = (+\infty) \end{cases}$$

ZATIKETAK

$$\frac{(l)}{(\pm\infty)} = (0)$$

$$\frac{(l)}{(0)} = (\pm\infty), \quad l \neq 0 \text{ bada}$$

$$\frac{(\pm\infty)}{(0)} = (\pm\infty)$$

$$\frac{(0)}{(\pm\infty)} = (0)$$

BERREKETAK

$(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty)$

$(+\infty)^{(-\infty)} = (0)$

$l > 0$ bada, $(+\infty)^{(l)} = (+\infty)$

$l < 0$ bada, $(+\infty)^{(l)} = (0)$

$l \neq 0$ bada, $(l)^{(0)} = (1)$

$$l > 1 \text{ bada, } \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (+\infty) \\ (l)^{(-\infty)} = (0) \end{cases}$$

$$0 < l < 1 \text{ bada, } \begin{cases} (l)^{(+\infty)} = (0) \\ (l)^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases}$$

4. INDETERMINAZIOAK

Eragiketa baten parte hartzen duten funtzioen limiteak bakarrik jakinda emaitzari limiterik ezarri ezin diogula onartzea. Limite hori lortzeko ikerketa sakonagoa egin behar da.

Indeterminazio kasu ohikoenak:

$\frac{(0)}{(0)}$ $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ $(+\infty)-(+\infty)$ $(+\infty)\cdot(0)$

$(+\infty)^{(0)}$ $(0)^{(0)}$ $(1)^{(+\infty)}$ $(1)^{(-\infty)}$

$\frac{(0)}{(0)}$ $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ $(+\infty)\text{-}(+\infty)$ $(+\infty)\cdot(0)$

$(+\infty)^{(0)}$ $(0)^{(0)}$ $(1)^{(+\infty)}$ $(1)^{(-\infty)}$

219orr . 2

Proposatutako ariketa

2 $x \to +\infty$ doanean $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$ badoaz, ahal den kasuetan, esan honako adierazpen hauek zer limite duten $x \to +\infty$ doanean:

a) $f(x) - h(x)$ b) $f(x)^{f(x)}$ c) $f(x) + h(x)$ d) $f(x)^x$ e) $f(x) \cdot h(x)$

f) $u(x)^{u(x)}$ g) $f(x)/h(x)$ h) $[-h(x)]^{h(x)}$ i) $g(x)^{h(x)}$ j) $u(x)/h(x)$

k) $f(x)/u(x)$ l) $h(x)/u(x)$ m) $g(x)/u(x)$ n) $x + f(x)$ ñ) $f(x)^{h(x)}$

o) $x + h(x)$ p) $h(x)^{h(x)}$ q) x^{-x} r) $f^2(x) + h^2(x)$ s) $f^2(x) - h^2(x)$

Proposatutako ariketa 220)1

$\frac{(0)}{(0)}$ $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ $(+\infty)\text{-}(+\infty)$ $(+\infty)\cdot(0$

$(+\infty)^{(0)}$ $(0)^{(0)}$ $(1)^{(+\infty)}$ $(1)^{(-\infty}$

1 $x \to 4$ doanean, honako emaitza hauek lortzen dira:

$$f(x) \to +\infty,\quad g(x) \to 4,\quad h(x) \to -\infty,\quad u(x) \to 0$$

Hurrengo funtzio hauetako zein dira indeterminatuak $x \to 4$ doanean? Kasu horietako bakoitza aztertuta, indeterminazioa badago, esan zer motatakoa den; eta ez badago, esan limitea zein den:

a) $f(x) + h(x)$ b) $f(x)/h(x)$

c) $f(x)^{-h(x)}$ d) $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ f) $u(x)^{h(x)}$

g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ h) $g(x)^{f(x)}$

241)11

5. INFINITUEN KONPARAZIOA x $\rightarrow \pm\infty$

Goragoko ordeneko infinitua x$\rightarrow$ $\pm\infty$

Berreketetan: maila altuena dauka da goragoko ordeneko infinitua. Adib: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{4/3}}{5x} = +\infty$

- Oinarri bereko bi polinomio ordena bereko infinituak dira.

Funtzio esponentzial:1 baino oinarri handiagoko funtzioa izango da goragoko ordeneko infinitua. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{1000 \cdot 1,5^x} = +\infty$

Adib:

- Oinarri bereko bi esponentzial, ordena bereko infinitu dira. Adib: $100 \cdot 2^x$ eta $0,01 \cdot 2^x$

<u>Gorako ordena definitzeko:</u>

1. Esponentzialak
2. Berreketak
3. Logaritmoak (1 baino oinarri handiagoko logaritmoak)

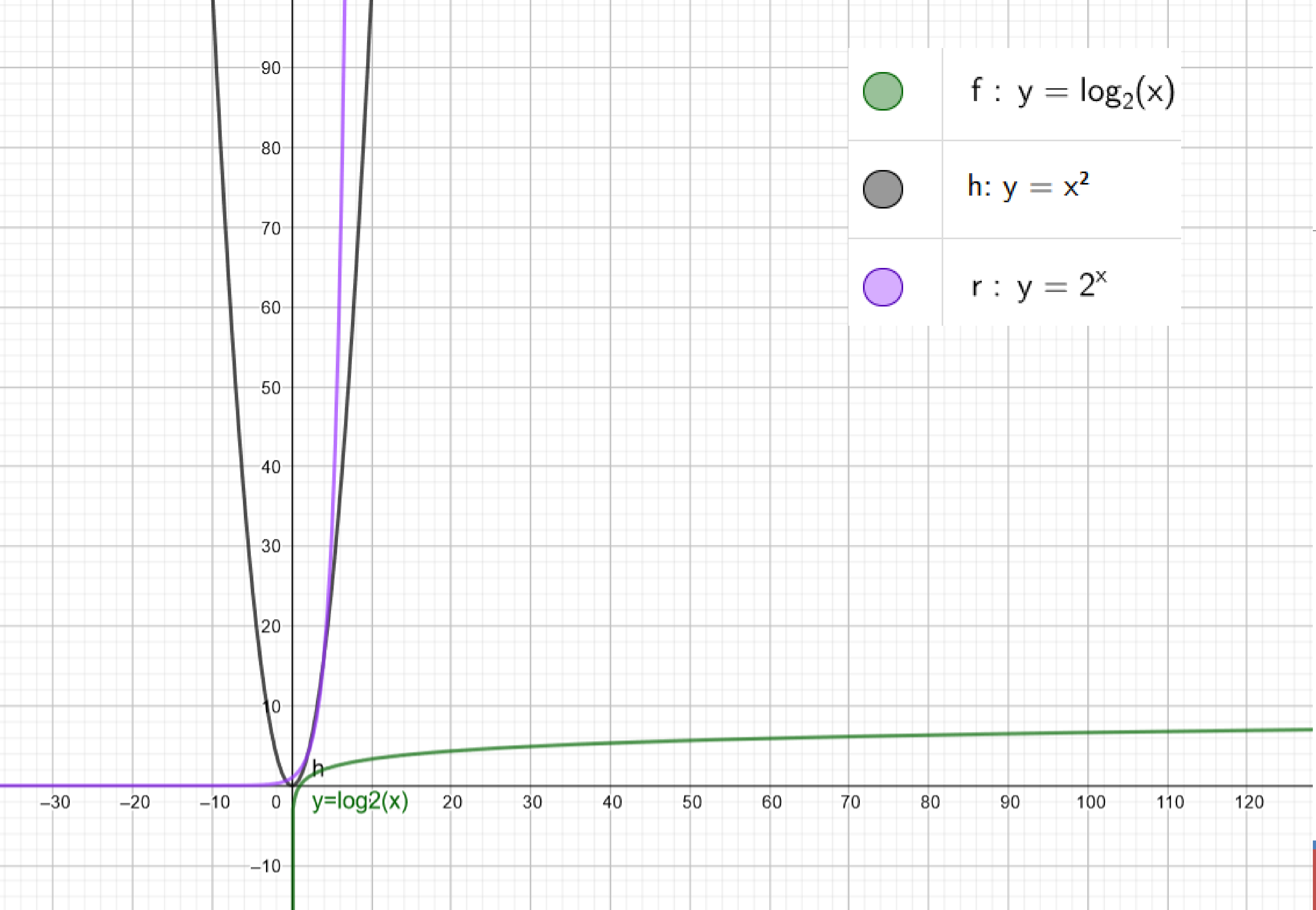
$$\log_2 x < \sqrt{x} < x^2 < 3x^5 < 1,5^x < 4^x$$

Batuketa bat izatekotan batugai ordena handieneko batugaiaren ordena.

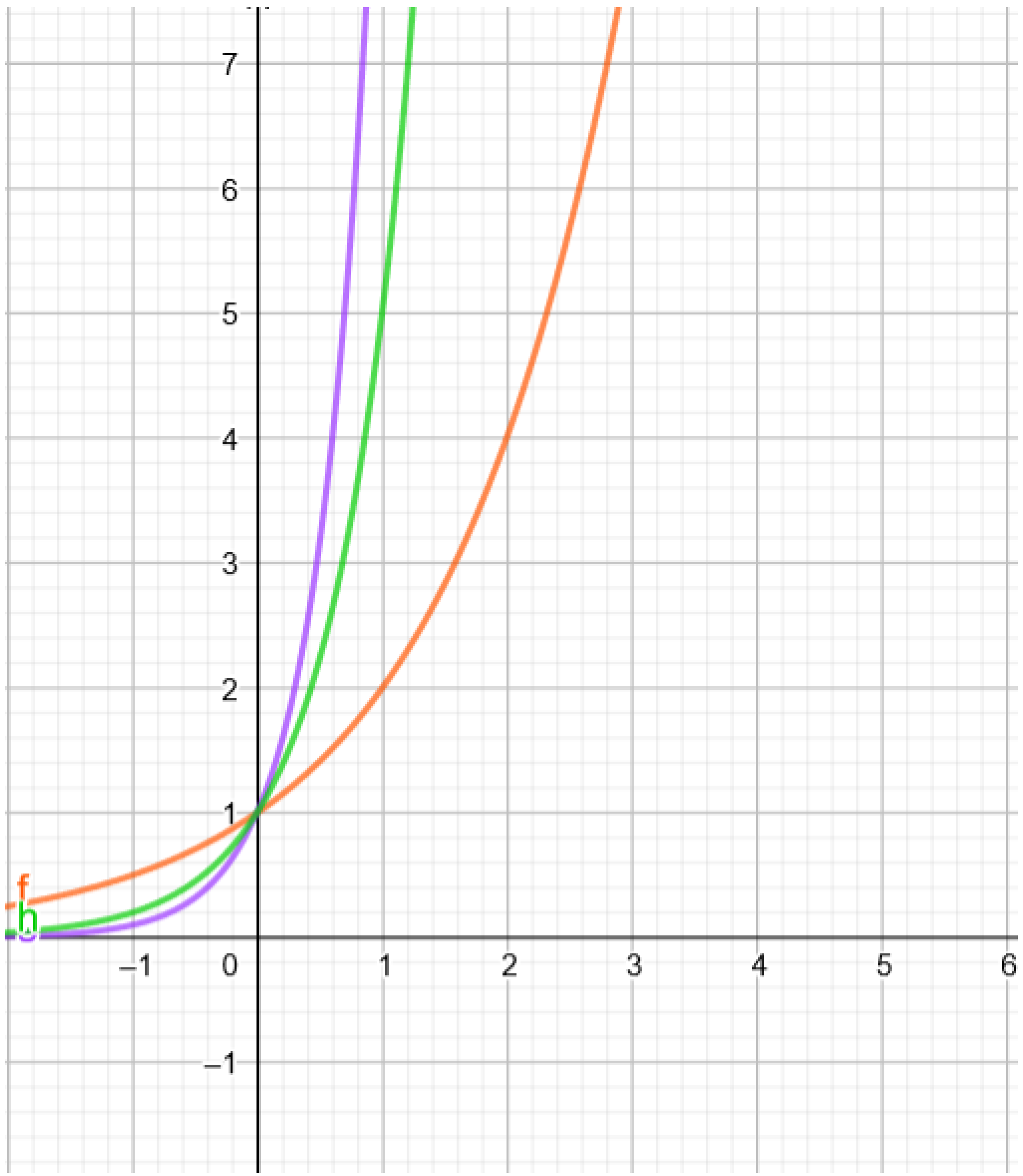
223)1,2

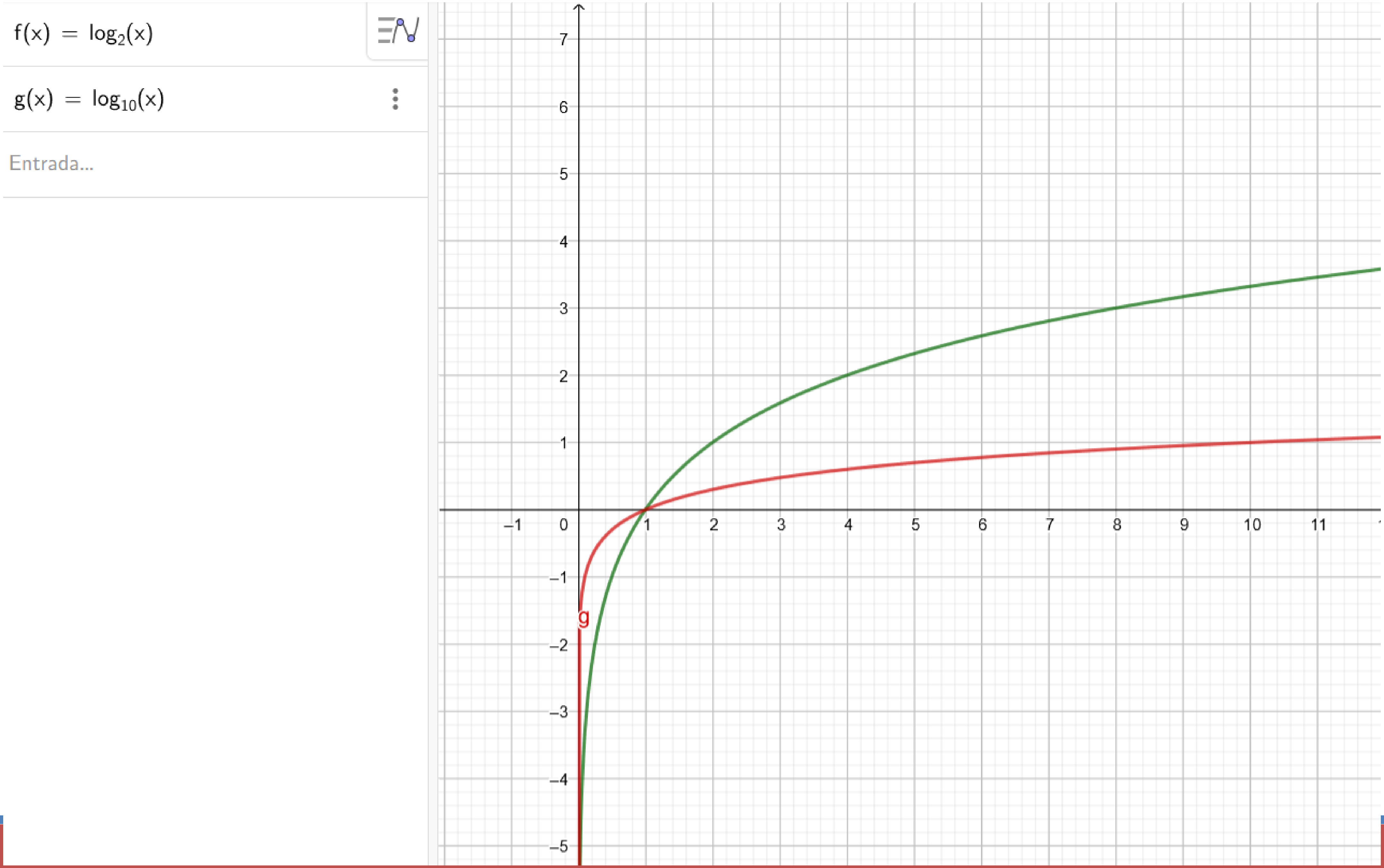
INFINITOEN ORDENAK LANTZEKO 241 .3:

241)4,7,9 (ERROAK),6 EGIN DAITEKEZ


f : y = log2(x)
h: y = x²
r : y = 2x
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
–10
–30
–20
–10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
h
y=log2(x)

	$f: y = 2^x$
	$g: y = 10^x$
	$h: y = 5^x$

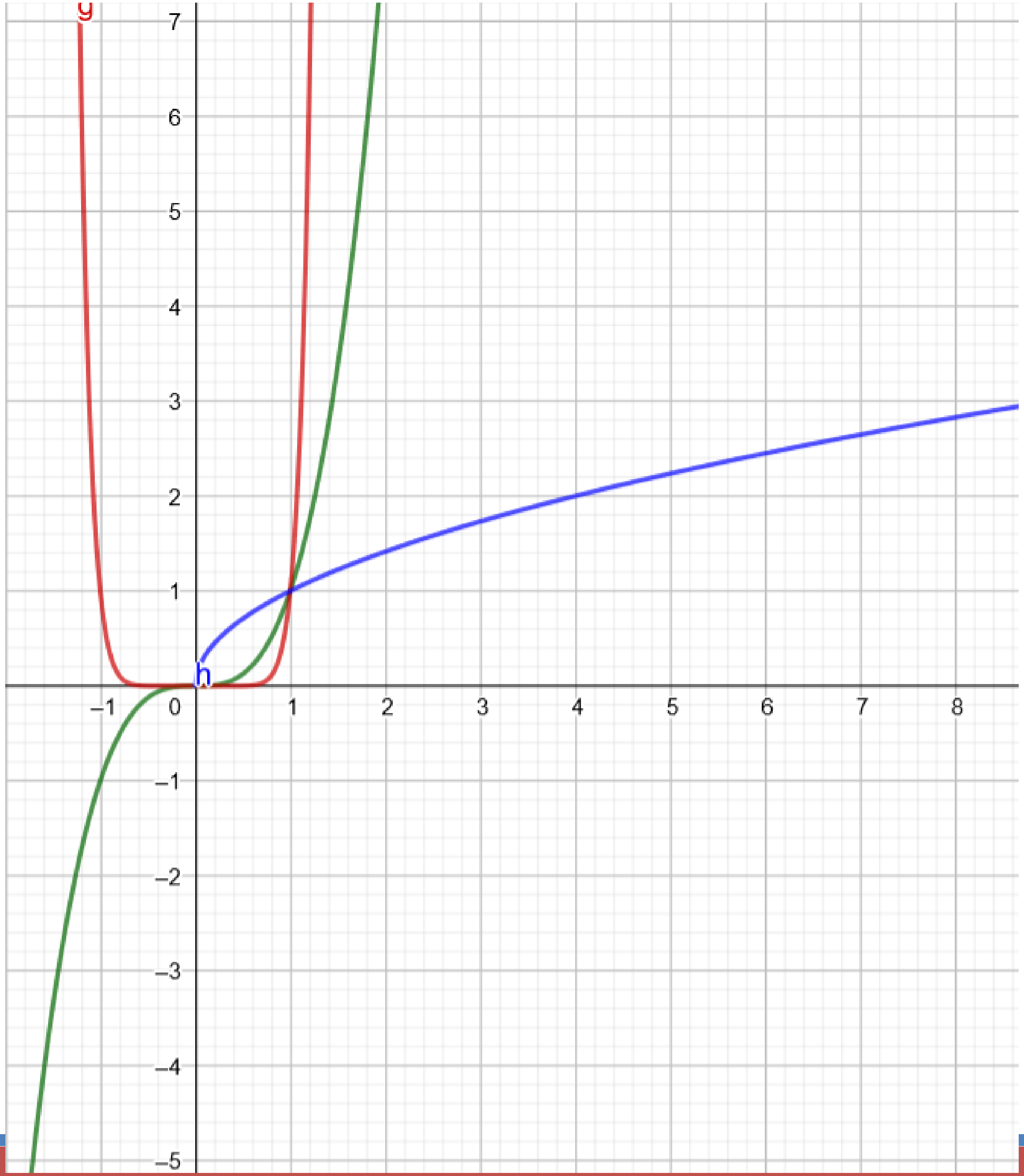



f(x) = log2(x)
g(x) = log10(x)
Entrada...
g
7
6
5
4
3
2
1
0
–1
–2
–3
–4
–5
–1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

$f : y = x^3$

$g : y = x^{10}$

$h : y = \sqrt{x}$



$$\log_2 x < \sqrt{x} < x^2 < 3x^5 < 1{,}5^x < 4^x$$

3. Infinituen konparazioa

Konparatu infinituen ordenak eta ezarri limitea honako adierazpen hauei:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(10x^2 - \sqrt{x^5 - 1}\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log (x^3 + 1)}{10x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{\log (x^3 + 1)}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 - 3^x}{2^{x+5}}\right)$

Etxerako 223)1

223)1

Proposatutako ariketak

1 Eragiketarik egin gabe, esan zein den honako adierazpen hauen limitea $x \to +\infty$ doanean:

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right)$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - log_5 x^4$

6. LIMITEAK x $\rightarrow$ $+\infty$ DOANEAN

6. 1 POLINOMIOEN ARTEKO ZATIDURA (batx1)

6.2 BESTE ZATIDURA BATZUK (adierazpen errodunak)

6.3. ADIERAZPEN INFINITUEN ARTEKO KENDURAK

- I. BEGIZ JOTA IKUSTEN DIRENAK
- II. ERAGIKETA EGIN DAITEKEENEAN
- III. ERRO KOADRATRIKOAK DAUDENEAN (bider eta zati konjugatua)

6.4 BERREDURA BATEN LIMITEA (errazak)

6.5 e ZENBAKIAREKIN ERLAZIONATUTAKO BEREHALAKO LIMITEAK $(1+\frac{1}{x})^x$

6.6 (1) $^\infty$MOTAKO ADIERAZPENAK

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ eta $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ badira, orduan:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

6. LIMITEAK x → ∞ DOANEAN

6. 1 POLINOMIOEN ARTEKO ZATIDURA (gogoratu ihazko ariketaren batekin)

$f(x) = \dfrac{ax^p + a'x^{p-1} + \dots}{bx^q + b'x^{q-1} + \dots}$ zatikiak honela jokatzen du: $\dfrac{a}{b}x^{p-q}$.

- $p > q$ bada, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ (limitearen zeinua a-ren eta b-ren zeinuen araberakoa izango da).
- $p = q$ bada, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$
- $p < q$ bada, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

BIRPASO BATX 1

LIMITEA x→∞ DOANEAN

FUNTZIO POLINOMIKOEN LIMITEAK

Adibidez:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 5x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-5x^3 + 7x^2 + 9) = -\infty$$

$x \to +\infty$ doanean, funtzio polinomiko baten limitea $+\infty$ edo $-\infty$ da, mailarik handieneko gaiaren koefizientea positiboa edo negatiboa den kontuan hartuta.

POLINOMIKOEN ALDERANTZIZKO LIMITEA

Adibidez, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^3 - 5x^2 + 3} = 0.$

$P(x)$ funtzio polinomiko bat bada, orduan $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{P(x)} = 0.$

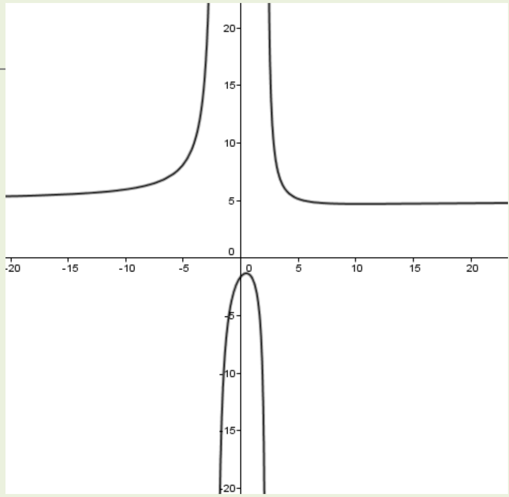
LIMITEA x→∞ DOANEAN

FUNTZIO ARRAZIONALEN LIMITEAK P(x)/Q(x)

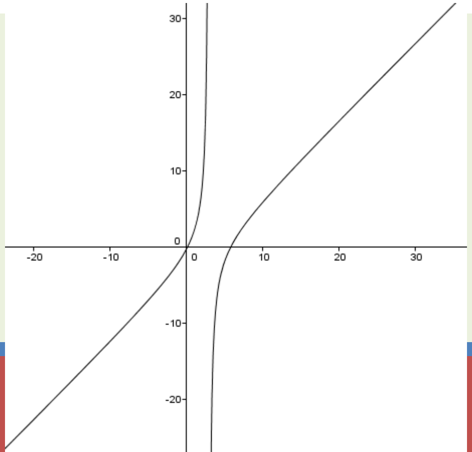
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a\,x^m + \ldots}{b\,x^n + \ldots}$ funtzio arrazional batean:

- *P-ren maila* > *Q-ren maila* bada (hau da, $m > n$), orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$. Emaitzaren zeinua $\dfrac{a}{b}$-ren zeinua da.
- *P-ren maila* < *Q-ren maila* bada ($m < n$), orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- *P-ren maila* = *Q-ren maila* bada ($m = n$), orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$.

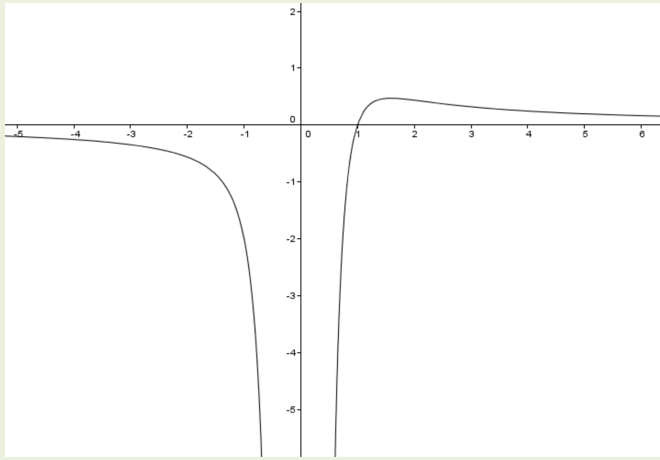
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5} = 5$$



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 6x + 1}{x - 3} = -\infty$$



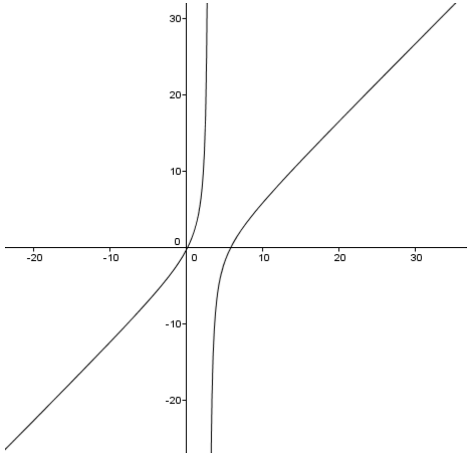
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 1}{x^4} = 0$$

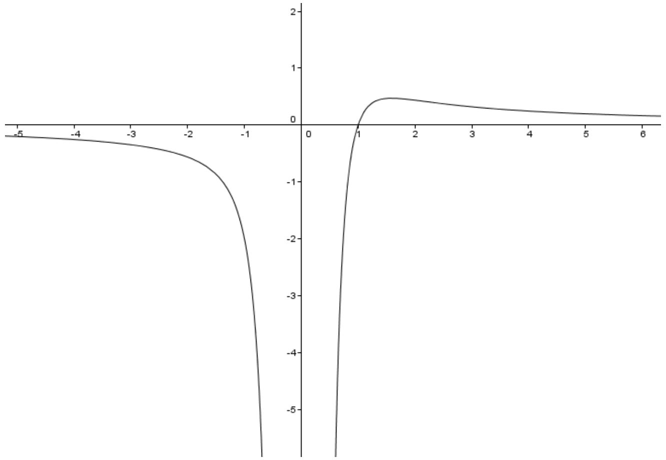


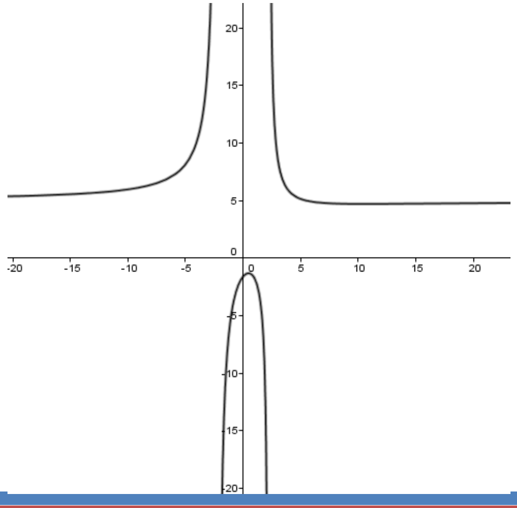
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-6x+8}{x^2-5}=5$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-6x+1}{x-3}=-\infty$$







LIMITEA x→-∞ DOANEAN

n bikoitia bada, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$; eta n bakoitia bada, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

Zeinuaren erregela kontutan hartuz eta behar den moduan erabiliz, funtzio polinomiko eta arrazionalen limiteak kalkulatzeko prozedurak x → +∞ doanean ikusitakoen berdinak dira.

LIMITEA $x \to \infty$

Fitxa 28.orrialdetik hartuta

k) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} =$

l) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x(x - 1)}{(x + 1)(x + 2)} =$

n) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3}{2x^2 - 1} =$

ñ) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{2x + 4} =$

6. LIMITEAK x → ∞ DOANEAN

6.2 BESTE ZATIDURA BATZUK

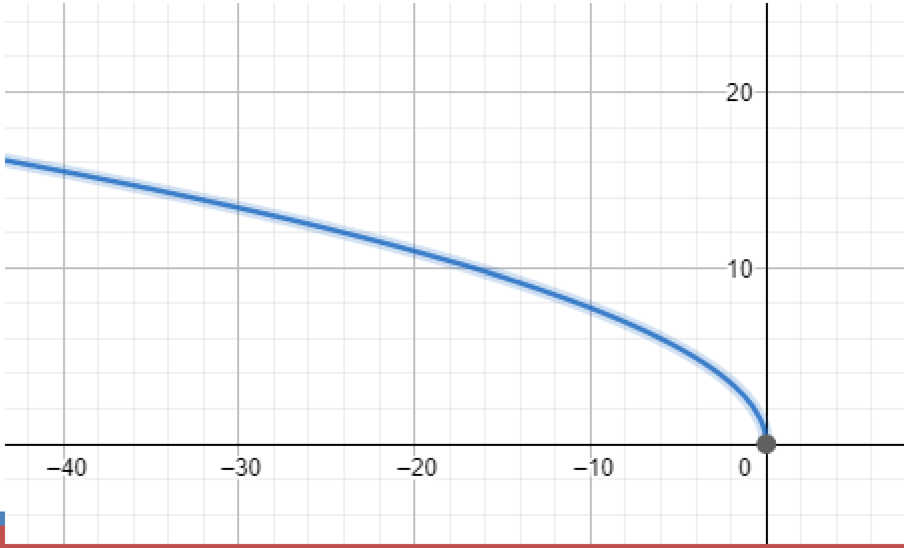
$\sqrt[p]{ax^n + \cdots}$ $\quad$ $\sqrt[p]{a} \cdot x^{n/p}$ Moduan hartuko dugu.

Kontuan eduki behar da a<0 eta p bikoitia deneko

Kasua ez dago definituta.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^3 - 2x}}{2x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5}x^{3/2}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5}}{2} x^{1/2} = +\infty$$

$f(x) = \sqrt{-6x}$



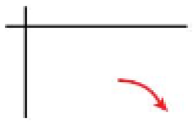
6.3. ADIERAZPEN INFINITUEN ARTEKO KENDURAK

I. BEGIZ JOTA IKUSTEN DIRENAK (223.orr 1.)

Infinituen konparaketak

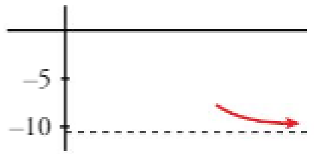
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-5)^4}{x^2-1}-1,5^x\right)=-\infty$$

1 baino oinarri handiagoa duen esponentzial bat berretura bat baino ordena handiagoko infinitua delako.



II. ERAGIKETA EGIN DAITEKEENEAN

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x}{x+3}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x-2x(x+3)}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-11x}{x+3}=-11$$

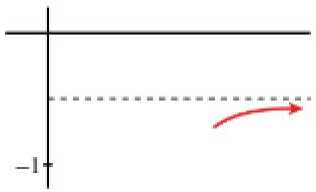


223.orr 2. Bigarren eta hirugarren kasuak

III. ERRO KOADRATRIKOAK DAUDENEAN

Konjokatuarekin biderkatu.

$$f(x)-g(x)=\frac{[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]}{f(x)+g(x)}=\frac{f(x)^2-g(x)^2}{f(x)+g(x)}$$



Adibidez:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

223.orr 1. eta 2.

Proposatutako ariketak

1 Eragiketarik egin gabe, esan zein den honako adierazpen hauen limitea $x \to +\infty$ doanean:

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right)$ b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ f) $\sqrt{x} - log_5 x^4$

2 Kalkulatu honako adierazpen hauen limitea $x \to +\infty$ doanean:

a) $\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}$ b) $\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}$ d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$ f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

$$\log_2 x < \sqrt{x} < x^2 < 3x^5 < 1{,}5^x < 4^x$$

INFINITOEN ORDENAK LANTZEKO:

241) EGIN DAITEKEZ
4 ordenak
7,ordenak
9 (ERROAK),
6(ordenak

$\log_2 x < \sqrt{x} < x^2 < 3x^5 < 1{,}5^x < 4^x$

241)4,7,9,6
EGIN
DAITEKEZ

4 **Calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$

f) $k(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

g) $l(x) = 2^x - 3^x$

h) $m(x) = \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x}$

241.orr **7** Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{1-2x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4+2x})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1}$

233.orr **9** Lortu limite hauek:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4})$

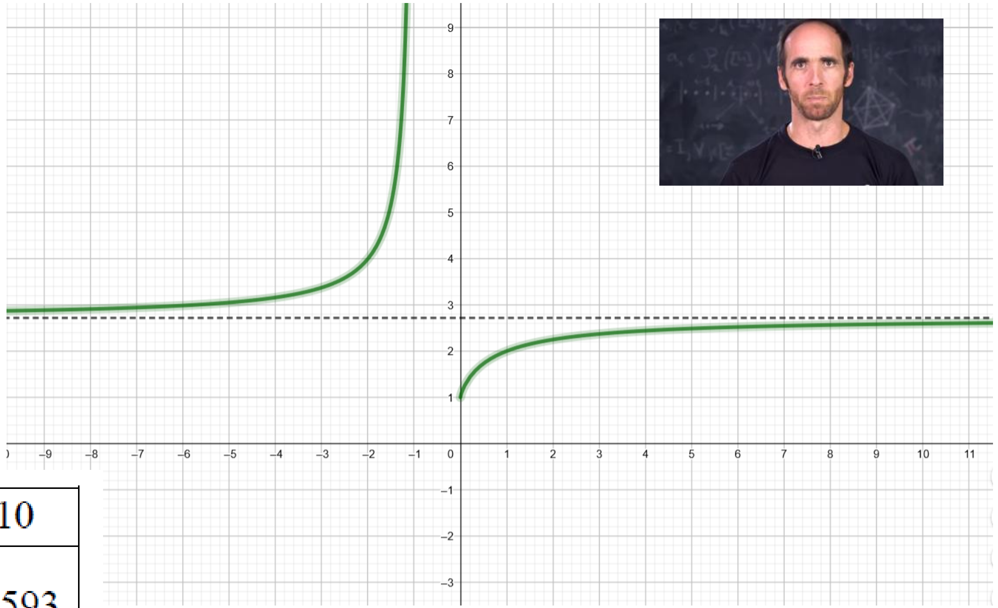
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$

e ZENBAKIA

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

-Kalkulatzerakoan 1^{∞} lortzen da, ez dana 1

$1+\frac{1}{x}\neq 1$ dalako edozein x-ren baliorako.



-Funtzioa ulertzeko balio bat betetzen dogu

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,521	2,546	2,565	2,581	2,593

x	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
f(x)	2,7048	2,7169	2,7181	2,71826	2,71828047	2,71828169	2,71828179

-Funtzioa astiro hasten da, gorakorra da eta bere limite balio finito bat dauka: e

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2{,}71828182845904523536028747135 27\ldots}$$

- Bardin gertatuko da limitea +∞-ra jotzen dauan besteekin

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$$

6.6 $(1)^{\infty}$ MOTAKO ADIERAZPENAK

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1} = 1^{\infty}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ eta $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ badira, orduan:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-1]\cdot g(x)}$$

225. 5.ariketa

Proposatutako ariketa

5 Ebatzi limite hauek aurreko erregela erabiliz. Gero, ebatzi ariketetako bat urrats guztiak emanez:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x-1} \right)^{5x-3}$

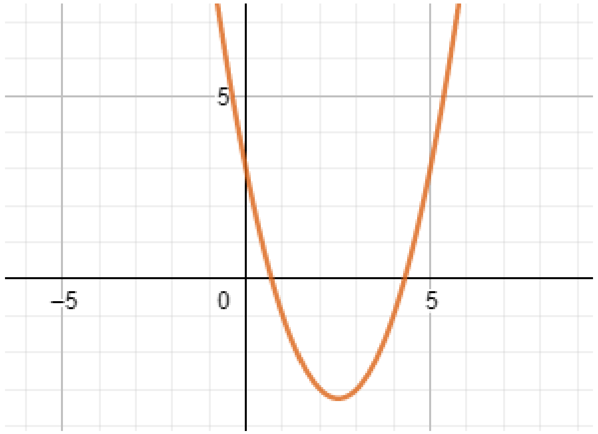
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+x^2} \right)^{2x-1}$

6 Kalkulatu: $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

7. LIMITEAK x → $^{-}\infty$ DOANEAN

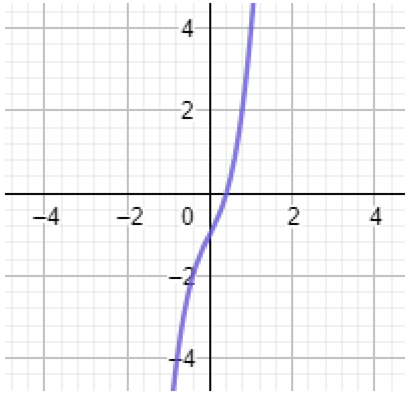
227 orr. 1 eta 2

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \to +\infty} [(-x)^2 - 5(-x) + 3] =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (x^2 + 5x + 3) = +\infty$$

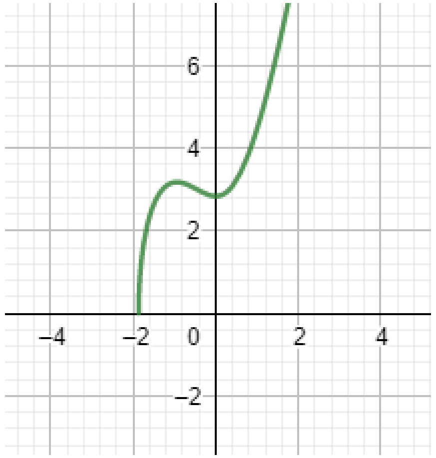


$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \to +\infty} [3(-x)^3 + \ldots] = \lim_{x \to +\infty} (-3x^3 + \ldots) = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5x^3 + 7x^2 + 8} \text{ ez da existitzen}$$



Proposatutako ariketak

1 Eragiketarik egin gabe, esan zein den honako adierazpen hauen limitea $x \to -\infty$ doanean:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

2 Kalkulatu adierazpen hauen limitea $x \to -\infty$ doanean:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

d) $2x + \sqrt{x^2+x}$

e) $\sqrt{x^2+2x} + x$

f) $\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h) $\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

9. LIMITEEN KALKULUA x→c

POLINOMIOEN ARTEKO ZATIDURA (BATX1)

IZENDATZAILEA BALIOGABETZEN EZ BADA

$Q(c) \neq 0$ bada, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

- EZ DA INDETERMINAZIOA

IZENDATZAILEA BALIOGABETZEN BADA ETA ZENBAKITZAILEA EZ

$P(c) \neq 0$ eta $Q(c) = 0$ badira, orduan $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Kasu hauetan, alboko bi limiteak aztertu behar dira. Horretarako, kalkulagailuaren laguntza erabil dezakegu, $P(x)/Q(x)$ zatidurak c-tik oso hurbil dauden puntuetan zer zeinu duen ikusiz, bi aldeetara. Adibidez, $c - 0{,}01$ eta $c + 0{,}01$ puntuetan.

K/0 INDETERMINAZIOA
ALBO LIMITEAK

BAI ZENBAKITZAILEA ZEIN IZENDATZAILEA BALIOGABETUTA

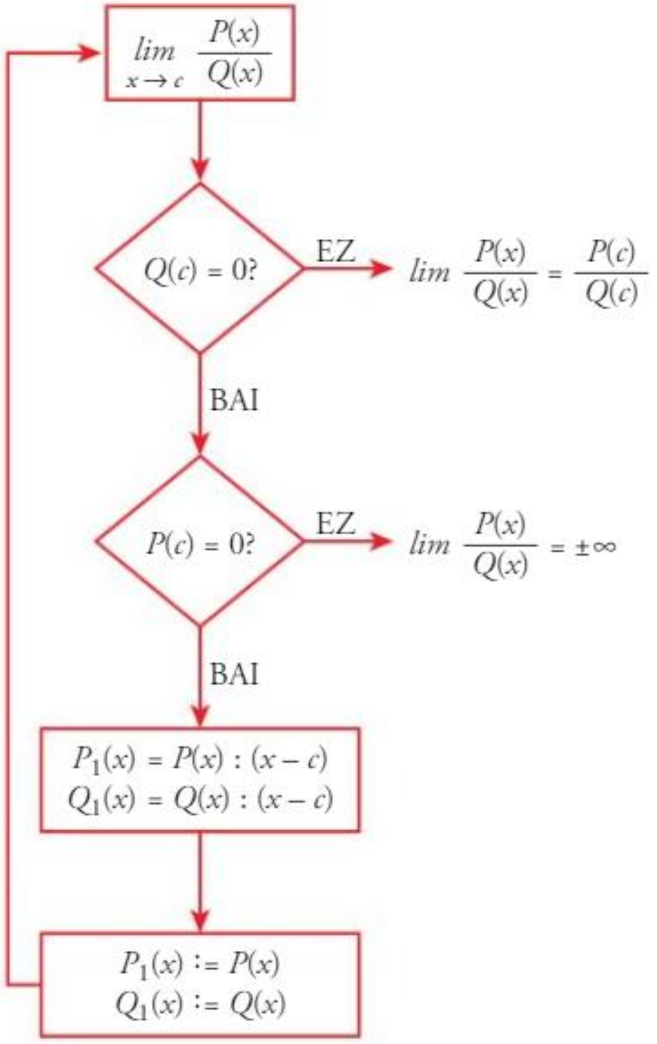
$P(c) = 0$, $Q(c) = 0$ badira, orduan zatidura sinplifikatu egin daiteke zenbakitzailea eta izendatzailea zati $(x - c)$ eginez:

$$P(x) = (x - c) \cdot P_1(x) \qquad Q(x) = (x - c) \cdot Q_1(x)$$

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x-c) \cdot P_1(x)}{(x-c) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Limite berri hau aurkitzeko, hiru kasuetako zein den aztertuko dugu.

0/0 INDETERMINAZIOA
FAKTORIZATU ETA SINPLIFIKATU



LIMITEA PUNTU BATERA DOANEAN $x \rightarrow c$

x balio batera hurbiltzearen esanahia:

x-k c-rantz jotzen dau ezkerretik zein den funtzioen portaera c punturantz ezkerretik hurbiltzean

$x \to c^-$ adierazpena honela irakurtzen da: «x c-rantz doa ezkerretik». x-k c-tik gero eta hurbilago dauden balioak hartzen dituela esan nahi du; c-tik nahi bezain hurbil daudenak, baina beti ere c baino txikiagoak direnak.

x-k c-rantz jotzen dau eskumatik zein den funtzioen portaera c punturantz eskumatik hurbiltzean

$x \to c^+$ adierazpenak (x c-rantz doa eskuinetik) x-k c-tik gero eta hurbilago dauden eta beti c baino handiagoak diren balioak hartzen dituela adierazten du.

x-k c-rantz jotzen dau zein den funtzioen portaera c punturantz hurbiltzean **(207orr)**

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = l$ bada, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ dela esaten dugu.

Eta berdin, alboko bi limiteak $+\infty$ edo $-\infty$ direnean.

Alboko bi limiteak bat ez badatoz, $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ **ez dela existitzen** esaten da.

LIMITEAREN KALKULUA x→ c

LIMITEA FUNTZIOA JARRAITUA DEN PUNTU BATEAN

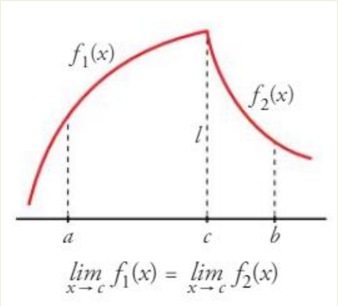
$f(x)$ adierazpen analitikoaren bidez emanda dagoen funtzio bat bada eta $x = c$ puntuan definituta badago, orduan:

$\lim_{x \to c} f(x)$ lortzeko, $f(c)$ kalkulatuko dugu

$$\lim_{x \to \pi/3} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ZATIKA DEFINITURIKO FUNTZIOEN LIMITEA

Azter dezagun $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq c \\ f_2(x), & x > c \end{cases}$ sistema, $f_1(x)$ eta $f_2(x)$ funtzio jarraituak izanik.



- **Kalkulatu $\boldsymbol{lim\, f(x)}$ eten-puntuan**

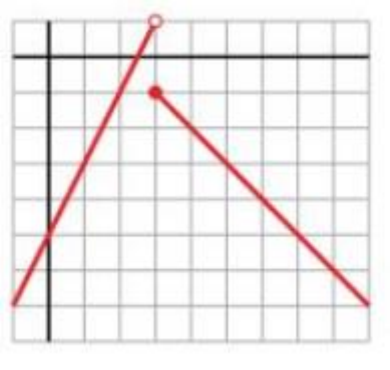
  f_1 eta f_2 jarraituak direnez, $\lim_{x \to c^-} f(x) = f_1(c)$ eta $\lim_{x \to c^+} f(x) = f_2(c)$. Beraz:

  - $f_1(c) = f_2(c) = l$ bada, orduan $\lim_{x \to c} f(x) = l$.
  - $f_1(c) \neq f_2(c)$ bada, orduan limitea ez da existitzen.

- **Kalkulatu $\boldsymbol{lim\, f(x)}$ eremuko beste puntu batean**

  Limitea lortzeko, honela jokatuko dugu:

  $a < c$ bada, $\lim_{x \to a} f(x) = f_1(a)$ $\qquad$ $b > c$ bada, $\lim_{x \to b} f(x) = f_2(b)$



P(x)/Q(x) BI POLINOMIOREN ZATIKETA

IZENDATZAILEA BALIOGABETZEN EZ BADA

$Q(c) \neq 0$ bada, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$

IZENDATZAILEA BALIOGABETZEN BADA ETA ZENBAKITZAILEA EZ

$P(c) \neq 0$ eta $Q(c) = 0$ badira, orduan $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Kasu hauetan, alboko bi limiteak aztertu behar dira. Horretarako, kalkulagailuaren laguntza erabil dezakegu, $P(x)/Q(x)$ zatidurak c-tik oso hurbil dauden puntuetan zer zeinu duen ikusiz, bi aldeetara. Adibidez, $c - 0{,}01$ eta $c + 0{,}01$ puntuetan.

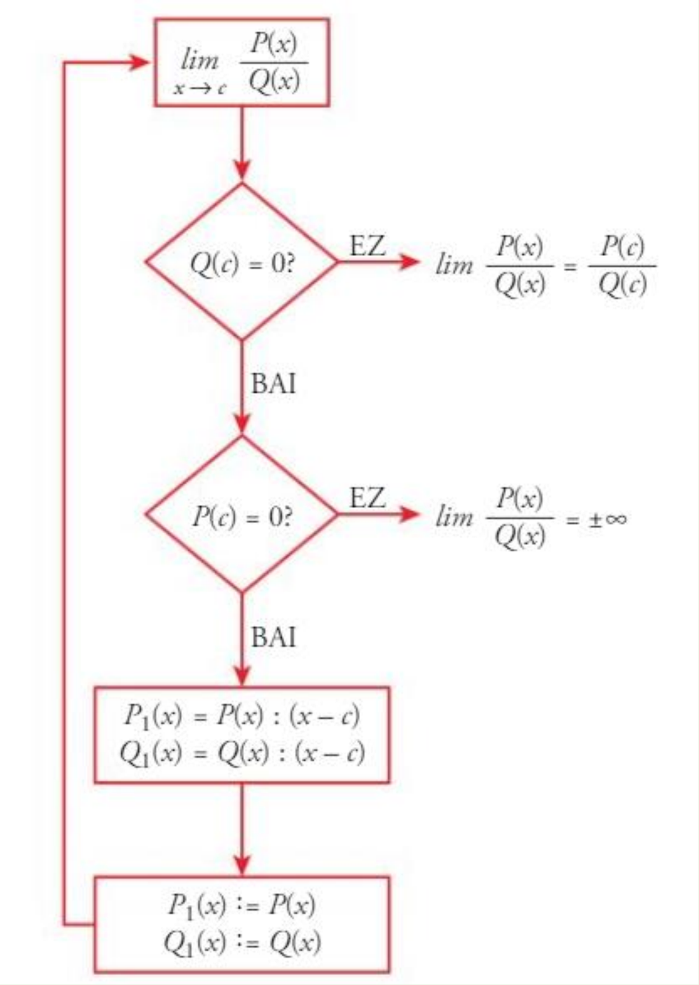
BAI ZENBAKITZAILEA ZEIN IZENDATZAILEA BALIOGABETUTA

$P(c) = 0$, $Q(c) = 0$ badira, orduan zatidura sinplifikatu egin daiteke zenbakitzailea eta izendatzailea zati $(x - c)$ eginez:

$$P(x) = (x - c) \cdot P_1(x) \qquad Q(x) = (x - c) \cdot Q_1(x)$$

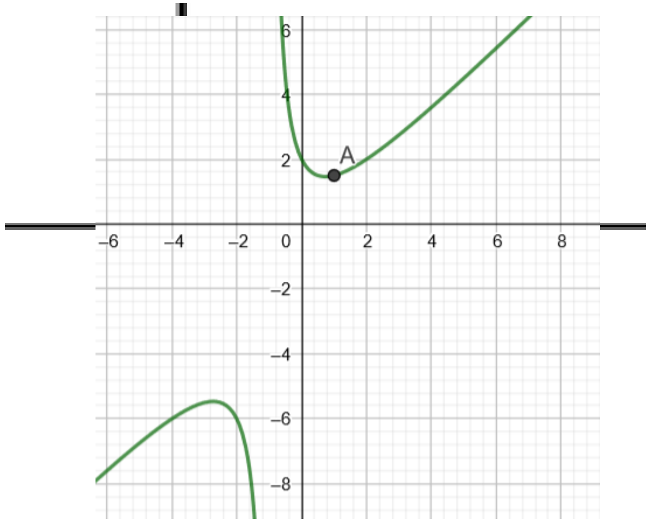
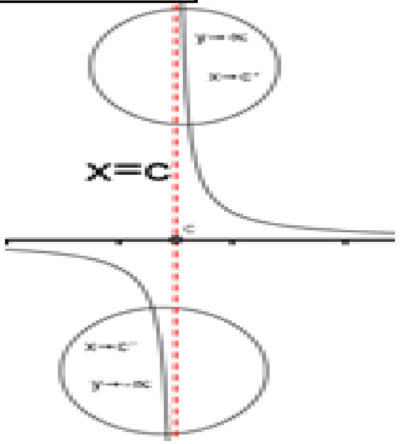
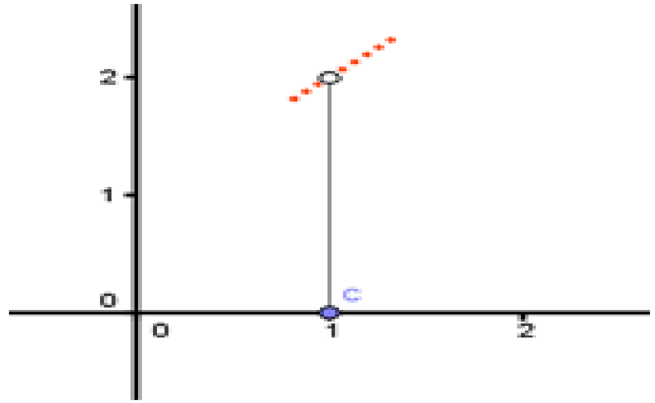
$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x - c) \cdot P_1(x)}{(x - c) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Limite berri hau aurkitzeko, hiru kasuetako zein den aztertuko dugu.



POLINOMIOREN ZATIDURARAREN LIMITEA x→c

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$Q(c) \neq 0$	$Q(c) = 0$ $P(c) \neq 0$	$Q(c) = 0$ $P(c) = 0$
$\lim\limits_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2}{x+1}$ $Q(x) = x+1 \quad \Rightarrow \quad Q(1) = 1+1 = 2 \neq 0$ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{1^2+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ 	$\lim\limits_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k}{0}$ *INDETERMIN.* **ALBOKO LIMITEAK KALKULATU** $\begin{cases} \lim\limits_{x \to c^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to c^-} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \end{cases}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty.}$ 	$\lim\limits_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$ *INDETERMIN.* **FAKTORIZATU ETA SINPLIFIKATU** $\lim\limits_{x \to c} \frac{(x-c)P_1(x)}{(x-c)Q_1(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 

POLINOMIOREN ARTEKO ZATIDURAR

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Bi arazo sortu daitezke:

1. $Q(x) = 0$

2. $Q(x) = 0 \; eta$

$P(x) = 0$

Adibidez:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x+1}{2-x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{4-2x}$$

POLINOMIOREN ZATIDURA Q(x)=0

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. $Q(x) = 0$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(-1)^2 - 3(-1)}{(-1)^2 - 2(-1) - 3} = \frac{4}{0} \quad INDETERMINAZIOA$$

Alboko limiteak kalkulatu behar dira

$x = -1{,}001$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(-1{,}001)^2 - 3(-1{,}001)}{(-1{,}001)^2 - 2(-1{,}001) - 3} = \frac{+}{0^+} = +\infty$$

$x = -0{,}999$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(-0{,}999)^2 - 3(-0{,}999)}{(-0{,}999)^2 - 2(-0{,}999) - 3} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

POLINOMIOEN ARTEKO ZATIDURA Q(X)=0 eta P(x)= 0

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$$

2. $Q(x) = 0 \; eta$

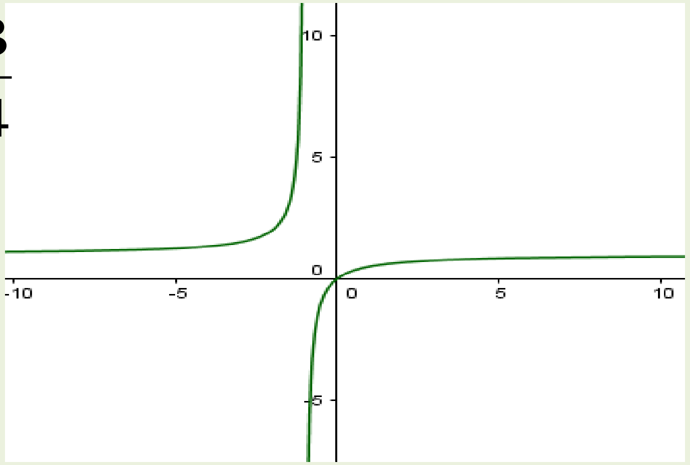
$P(x) = 0$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3)^2 - 3(3)}{(3)^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0} \quad INDETERMINAZIOA$$

Izendatzailea eta zenbakitzaileak **faktoreetan deskonposatu eta zatidura sinplifikatu**

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{(x+1)} = \frac{3}{4}$$

$$beraz, \lim_{x \to 3} \frac{x}{(x+1)} = \frac{3}{4}$$



POLINOMIOREN ZATIDURARAREN LIMITEA x→c

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Fitxa 28.orrialdetik hartuta

k) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x - 3} =$

l) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} =$

m) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} =$

s) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 4x^2 + x - 2} =$

Liburuko 12.ariketa (0/0)

233.Orrialdetik
12.ariketa

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{1 - x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(x^3 - 1)(x - 2)}$

c) $\lim\limits_{x \to -2/3} \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{9x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

INDETERMINAZIOAK x→ C DOANEAN (lib 222.orr)

POLINOMIOEN ARTEKO ZATIDURA, $\frac{(0)}{(0)}$ INDETERMINAZIOA (BATXI 1ean ikusitakoa)

Polinomioen arteko zatidura, $\frac{(0)}{(0)}$ indeterminazioa

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $Q(c) \neq 0$ bada, orduan $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$ (ez da indeterminazioa).
- $Q(c) = 0$ bada, bi kasu gerta daitezke:

— $P(c) = 0$. Orduan zatikia sinplifikatu egin daiteke, zenbakitzailea eta izendatzailea zati $x - c$ eginez, eta hau lortzen dugu:

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)(x-c)}{Q_1(x)(x-c)} = \lim_{x \to c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

— $P(c) \neq 0$. Orduan limitea $\pm\infty$ da. Limitea desberdina izan daiteke c-ren ezkerrera eta eskuinera. Hori jakiteko, c-tik hurbil dauden x-ren alde bateko eta besteko balioetarako zatidura zenbat den lortuko dugu kalkulagailuarekin.

Ikus ditzagun adibide batzuk:

1. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$

2. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2+5)} = \lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(4)}{(0)} = \pm\infty$ (Kasu honetan, 1en eskuinera $-\infty$ da, eta ezkerrera, $+\infty$).

230)3

BESTE ZATIDURA BATZUK $\frac{(0)}{(0)}$

Eragiketak eginez:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \frac{(0)}{(0)}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \frac{\sqrt[3]{(x-2)\,x}}{\sqrt{(x-2)\,(x+3)}} = \frac{\sqrt[6]{(x-2)^2\,x^2}}{\sqrt[6]{(x-2)^3\,(x+3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)\,(x+3)^3}}$$

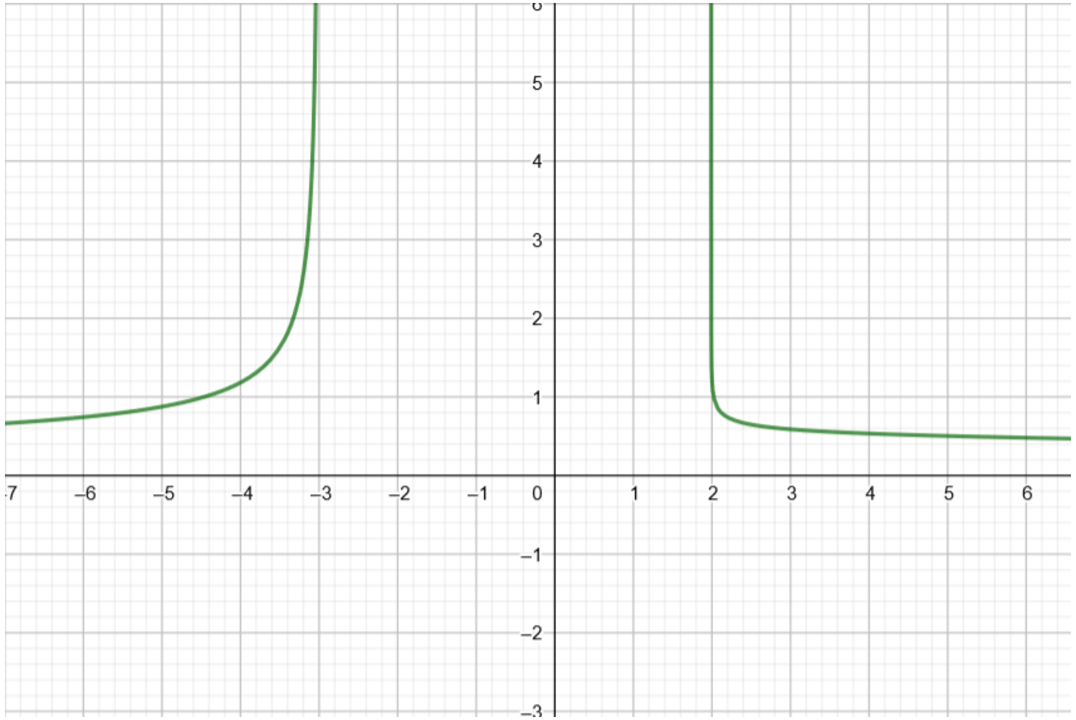
$\sqrt[6]{\frac{4}{0}}$ = indeterminazioa (albo limiteak)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x^2 + x - 6}} = \lim_{x \to 2} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)\,(x+3)^3}}$$

$\lim_{x \to 2^-} f(x)$ ez da existitzen

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

230)4



BESTE ZATIDURA BATZUK $\frac{(0)}{(0)}$

Eragiketak eginez:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{\sqrt[3]{(x-2)\,x}}{\sqrt{(x-2)\,(x+3)}} = \frac{\sqrt[6]{(x-2)^2\,x^2}}{\sqrt[6]{(x-2)^3\,(x+3)^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)\,(x+3)^3}}$$

$\sqrt[6]{\frac{4}{0}}$= indeterminazioa

(albo limiteak)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{(0)}{(0)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+x-6}} = \lim_{x\to 2} \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-2)\,(x+3)^3}}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ez da existitzen

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

230)4

KENDURA (+∞)-(+ ∞)

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x\,(x-3)} - \frac{1}{x-3}\right] = (+\infty) - (+\infty) \qquad \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x\,(x-3)} - \frac{x}{x\,(x-3)}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-6-x}{x\,(x-3)} = \frac{(0)}{(0)} =$$

231)5

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\,(x+2)}{x\,(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$$

(1) $^\infty$ MOTAKO ADIERAZPENAK

Kalkulatu:

$\lim_{x\to c} f(x) = 1$ eta $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$ badira, orduan:

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c} [f(x)-1]\cdot g(x)}$$

231)6

$$\lim_{x\to 7}\left(\frac{x^2-7x+4}{x-3}\right)^{\frac{x+1}{x-7}}$$

230)

Proposatutako ariketak

3 Kalkulatu limite hauek:

a) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ b) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

(0/0)

4 Kalkulatu limite hauek: **(0/0)**

a) $\lim_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

231)12

Proposatutako ariketak

5 Kalkulatu: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

6 Kalkulatu: $\lim\limits_{x \to 7} \left(\dfrac{x^2 - 7x + 4}{x - 3} \right)^{\frac{x+1}{x-7}}$

Etxerako 241)12 erroak

241) 11 eragiketak

241) 13 1înf--< formula

13 Kalkulatu eta adierazi lortutako emaitzak.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2-5x+6} - \dfrac{4}{x-2} \right]$

14 Kalkulatu eta aztertu alboko limiteak beharrezkoa denean.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \right]$

15 Kalkulatu.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{7-x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

10. L'HOPITALen ERREGELA

$$\lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad edo \quad \lim_{x\to} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)}$ motako limiteek ($\square$ kasu horretan $-\infty$, $+\infty$ edo zenbaki bat izanik) $\frac{(0)}{(0)}$ edo $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ motako indeterminazio bat ematen badute, zenbakitzailea eta izendatzailea deribatuz eta deribatuen arteko zatiduraren limitea kalkulatuz lor daitezke (baldin eta existitzen bada).

Batzuetan, lehenengo urrats hori eman ondoren, beste indeterminazio bat agertzen da eta, beraz, berriro egin behar da prozesua.

$(\infty)-(\infty)$, $(1)^{(\infty)}$, … motako zenbait adierazpen nahikoa erraz jar daitezke zatidura moduan, ondoren L'Hôpitalen erregela erabili ahal izateko.

Adibidea

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{6x+2}{2x-1} = \frac{14}{3}$$

Bila gabiltzan limitea $\frac{14}{3}$ da.

232 224orr adibideak eta 233 225orr ariketa

242 234orr 14

Proposatutako ariketa

1 Kalkulatu limite hauek L'Hôpitalen erregela erabiliz:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x(1 + \cos x)}{x \cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

g) $\lim\limits_{x \to 2} (3 - x)^{2/(x^2 - 4)}$

h) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$

17 Erabili L'Hôpitalen erregela honako limite hauek kalkulatzeko:

a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2-3x-4}$ b) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(e^x+x^3)}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{sin\,x}{1-cos\,x}$ d) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{arctg\,x - x}{x - sin\,x}$ f) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{sin\,x}}{1-cos\,x}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(cos\,3x)}{x^2}$ h) $\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{\sqrt[4]{x^3}}$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos^2(2x)}{3x^2}$ j) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x - sin\,x}{x\,sin\,x}\right)$

k) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos\,x}{e^x-1}$ l) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\,x-8}{sec\,x+10}$

8. FUNTZIO BATEN PUNTU BATEKO LIMITEA. JARRAITASUNA

f(x) funtzioa jarraia izan dadin x = c puntuan, hiru baldintza hauek bete behar dira:

1. Funtzioa definituta egotea x=c puntuan f(c)=b

2. Limitea existitzea x= c denean (albo limite bardinak ian behar dira)

- $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to c^{+}} f(x) = b$

$$\lim_{x \to c} f(x) = b$$

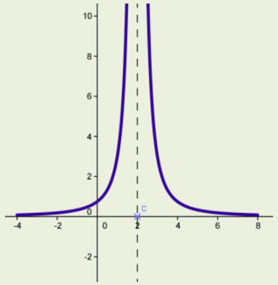
3. Limitea eta funtioaren balio x=c denean, bat etortea

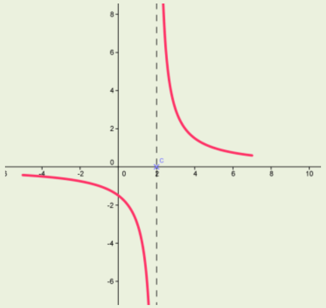
$$\lim_{x \to c} f(x) = b = f(c)$$

229orr

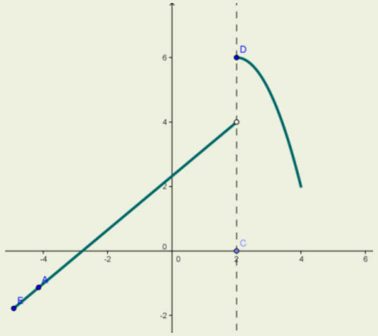
ETEN MOTAK

JAUZI/ADAR INFINITUA

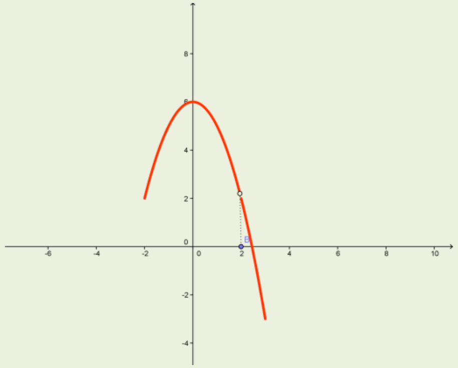




JAUZI FINITUA

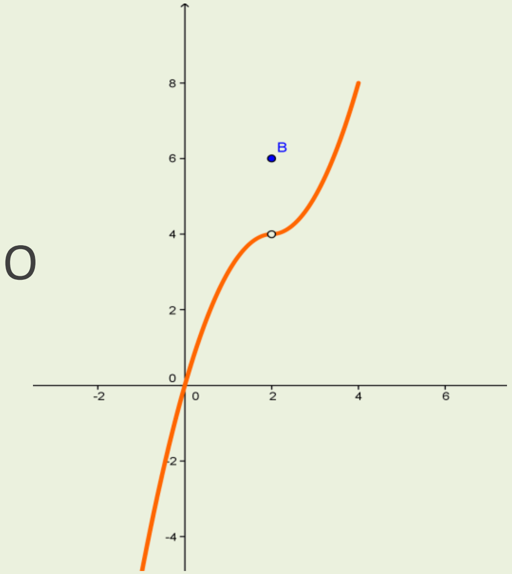


PUNTU BAT FALTA



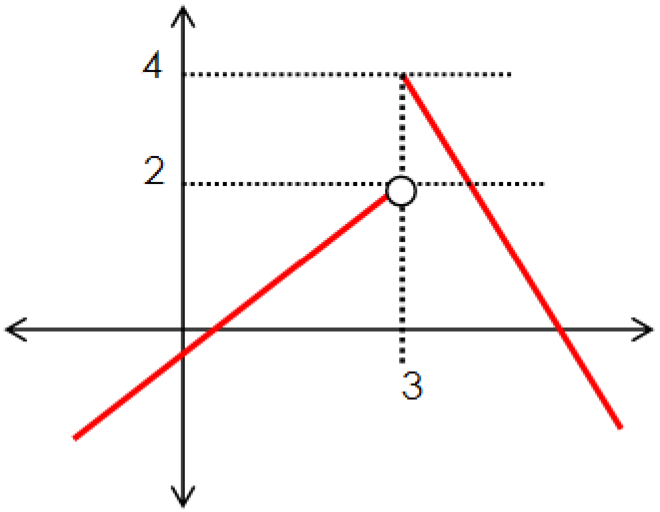
PUNTUA

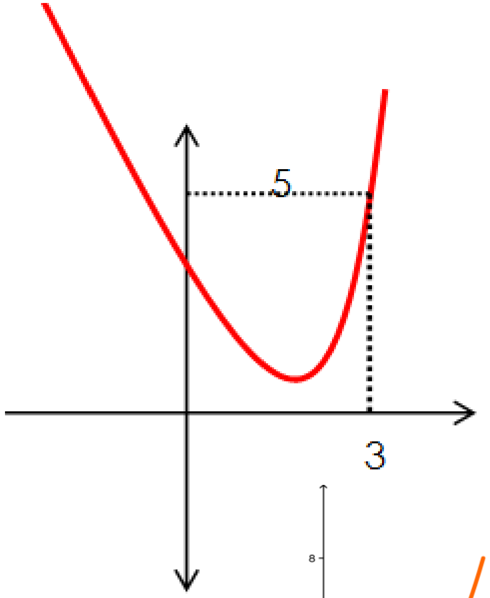
MUGITUTA DAGO

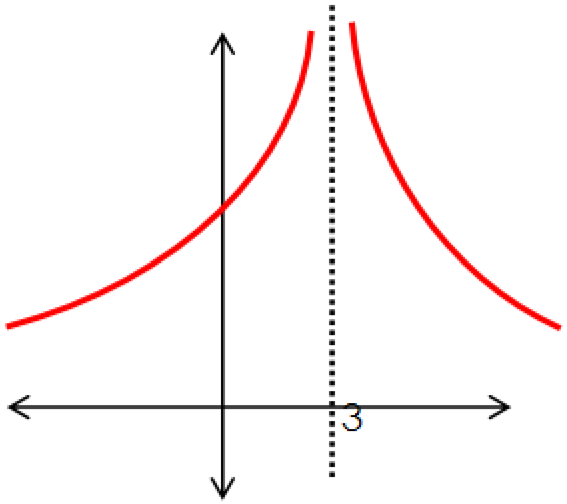


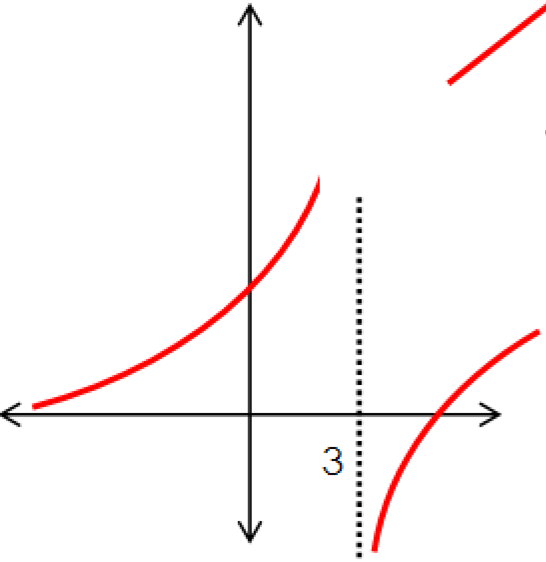
ARIKETA: AZTERTU JARRAITASUNA

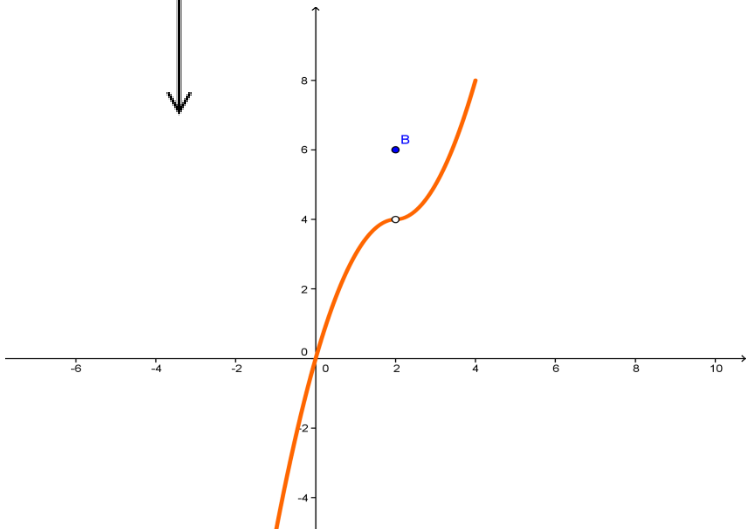
Irudikatutako funtzioak ikusiz, esan zein den funtzioen limitea $x=3$ punturantz hurbiltzean ezkerretik eta eskumatik

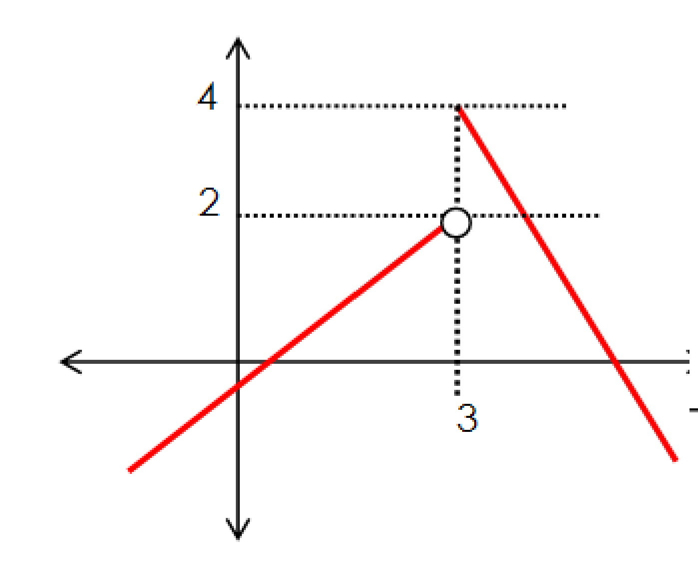












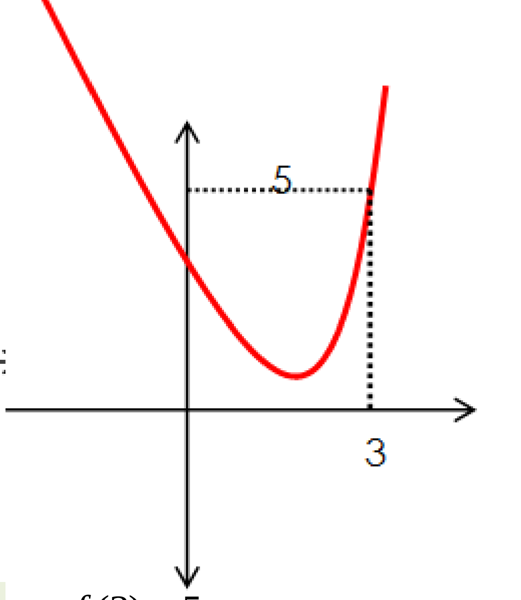
$f(3)=4$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=4$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=4 \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$

JAUZI FINITUA



$f(3)=5$

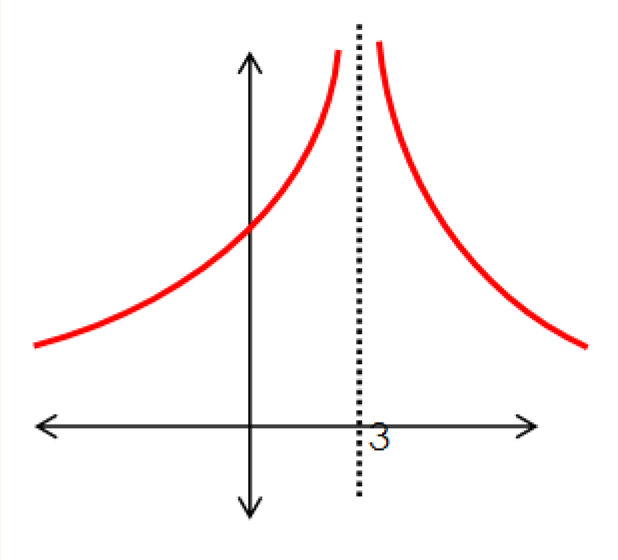
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=5$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=5=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$

JARRAIA DA



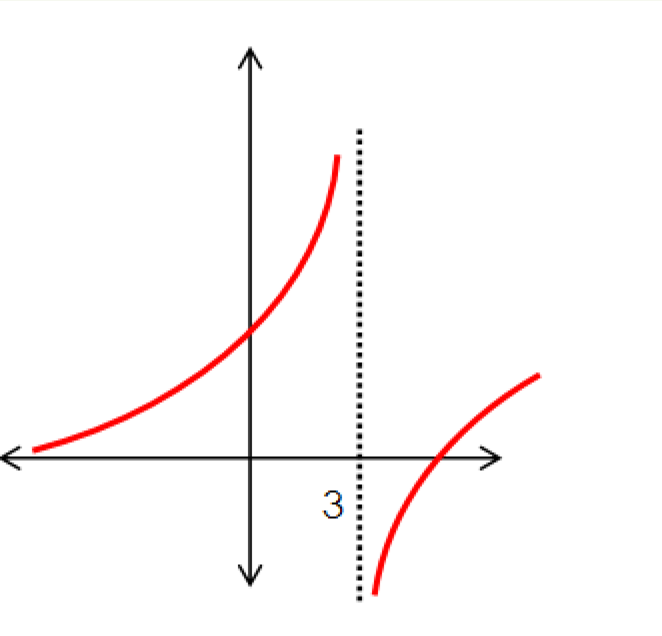
$Ezdagodefinitutaf\,(3)$

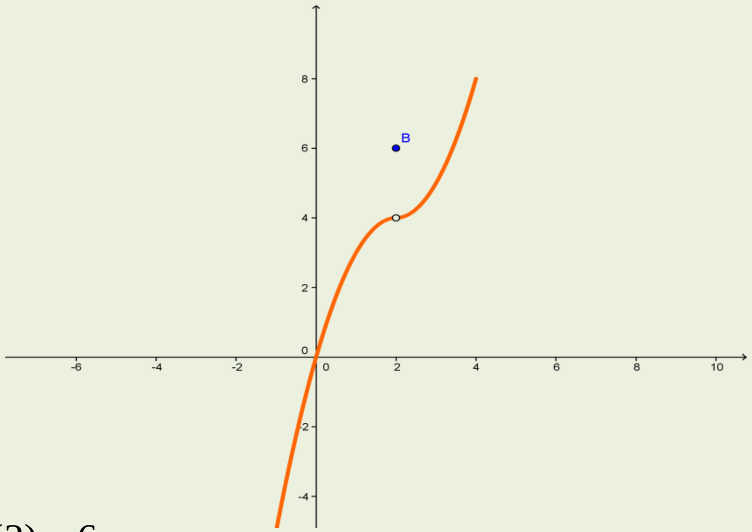
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

ADAR INFINITUA
(asintota bertikala)





$Ezdago definituta f(3)$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim_{x \to 3^-} f(x)$

ADAR INFINITUA
(asintota bertikala)

$f(2) = 6$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 = \lim_{x \to 2^-} f(x) \to \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

$f(2) = 6 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 4$

PUNTU MUGITUA

7 Aztertu honako funtzio hauek jarraituak diren adierazten diren puntu horietan:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & x < -1 \\ 2x + 4 & x > -1 \end{cases}$ $x = -1$ puntuan

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 2 \\ (x/2) - 3 & x \geq 2 \end{cases}$ $x = 2$ puntuan

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 1 \\ x + 3 & x > 1 \end{cases}$ $x = 1$ puntuan

8. LIMITEA PUNTU BATEAN.JARRAITASUNA

f funtzioa jarraia izango da x = c puntuan, hiru baldintza hauek betetzen badira:

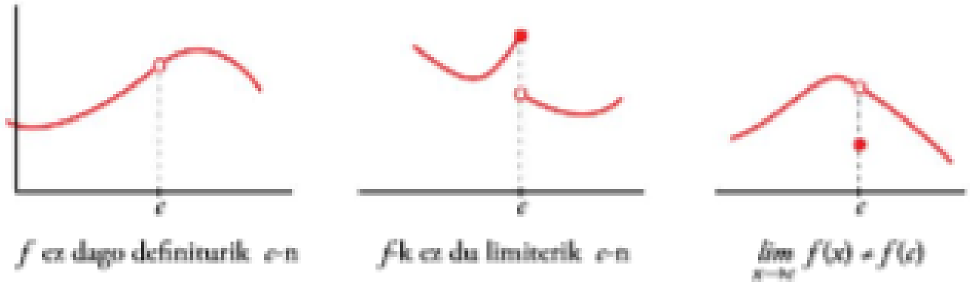
1.- Funtzioa definituta egotea x = c puntuan, beraz existitzen da f(c)

2.- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$ egotea. Limitea existitzen da eta finitua da.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = b \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to c} f(x) = b$$

3.- f(c) eta f(x)-ren limitea bat datoz: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

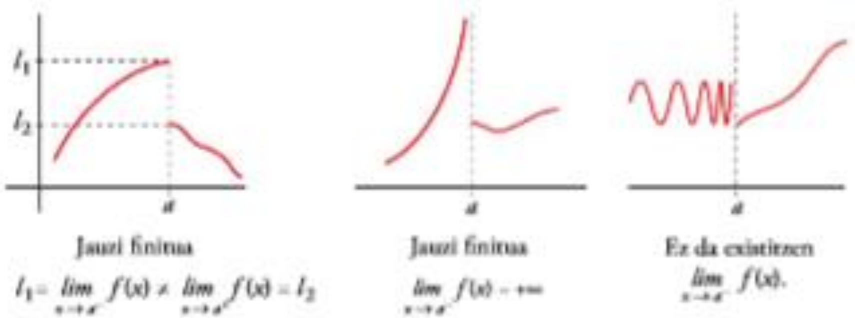
Funtzio batek jarraitua izateari utziko deutso baldintza horietakoren bat betetzen ez badau



Funtzio bat etena denen c puntuan, baina puntu horretar **limitea existitzen denean**, etena saihesgarria dela esater dogu.

Gainerako kasuetan, **limitea ez danean existitzen**, etena saihestezina da.

- **Jauzi finitu:** alboko limiteak finitoak eta desbardinak
- **Jauzi infinitua:** alboko limiteren bat edo biak infinituak dira
- **Alboko limiterik ez izatea**



234) 19,20,23,31,30,39

19 Aztertu honako funtzio hauen jarraitutasuna eta irudikatu horien grafikoak:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \text{ bada} \\ ln\, x & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1/x & x < 1 \text{ bada} \\ 2x - 1 & x \geq 1 \text{ bada} \end{cases}$

242) **20** Kalkulatu zein izan behar den k-ren balioa honako funtzio hauek jarraituak izateko definizio-eremu osoan. Irudikatu itzazu lortutako k-ren balio horretarako:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & x < 3 \text{ bada} \\ ln(x-2) & x \geq 3 \text{ bada} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & x \leq 2 \text{ bada} \\ e^{x^2-4} & x > 2 \text{ bada} \end{cases}$

21 Kalkulatu a-ren eta b-ren balioak $f(x)$ jarraitua izan dadin definizio-eremu osoan.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \text{ bada} \\ ax + b & 0 \le x < 1 \text{ bada} \\ 2 & 1 \le x \text{ bada} \end{cases}$$

242) **23** Sailkatu honako funtzio hauen etenak:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

243)

24 Honako funtzio hau dugu:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & -1<x<0 \text{ bada} \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & x\geq 0 \text{ bada}\end{cases}$$

$(-1,+\infty)$ tartean jarraitua dela jakinda, aurkitu a-ren balioa.

30 Kalkulatu zein izan behar den k-ren balioa beheko funtzio horiek jarraituak izateko. Horietakoren bat jarraitua da $\mathbb{R}$ osoan?:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ \ln k, & x=1\end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2^k, & x=1\end{cases}$

31 Kalkulatu zein izan behar den b-ren balioa $f(x)$ funtzioa jarraitua izateko $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & x \leq 0 \text{ bada} \\ \dfrac{ln(1+x)}{2x} & x > 0 \text{ bada} \end{cases}$$

32 Kalkulatu k-ren balioa honako funtzio hau jarraitua izateko $x = 0$ puntuan:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{e^x - 1} - \dfrac{k}{x} & x \neq 0 \text{ bada} \\ -1 & x = 0 \text{ bada} \end{cases}$$

24 Kalkulatu honako limite hauek: 243)

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2} \right)^{1-x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x - 5}{2x + 3} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$

24 Kalkulatu honako limite hauek: 234)

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 3}{5x^3 - 2x^2} \right)^{1-x}$ b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 5}{2x + 3} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ d) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{13 - x^2} - 3}{x - 2}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$ f) $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x}$

g) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ h) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$