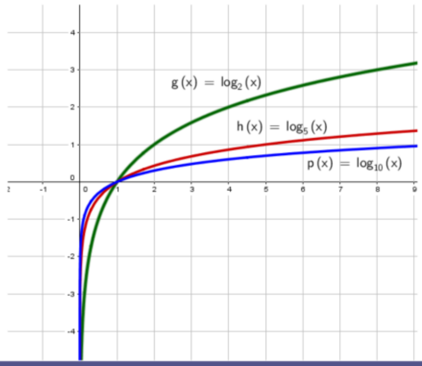
**87.** **Adierazi funtzio logaritmikoen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:**

a) $f(x) = \log_2 x \qquad g(x) = \log_5 x \qquad h(x) = \log_{10} x$

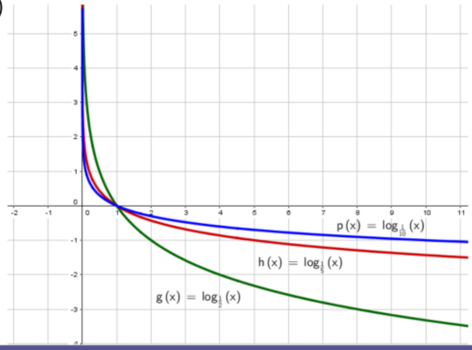
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x \qquad h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

259.Orr 9-10

a)



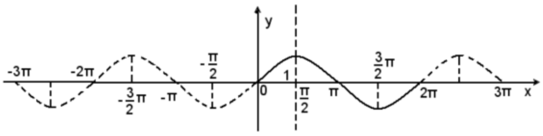

b)



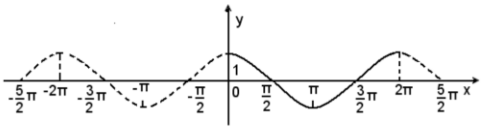

# 2. 6. FUNTZIO TRIGONOMETRIKOAK

## 2. 6. 1. SINU ETA COSINU FUNTZIOAK

$\mathbf{f(x) = sin\ x}$



$\mathbf{f(x) = cos\ x}$



**Ezaugarriak:**

- $\boldsymbol{Dom\ f} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{Im\ f} = [\mathbf{-1, 1}]$
- Funtzio periodikoa da, 2π periododuna
- $\sin(-x) = -sinx \Rightarrow$ funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)

**Ezaugarriak:**

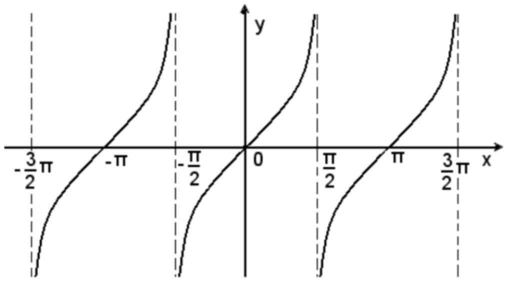
- $\boldsymbol{Dom\ f} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{Im\ f} = [\mathbf{-1, 1}]$
- Funtzio periodikoa da, 2π periododuna
- $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow$ funtzio bikoitia (Y ardatzarekiko simetrikoa)

#### 2. 6. 2. TANGENTE FUNTZIOA

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{tg\ x}$$

**Ezaugarriak:**

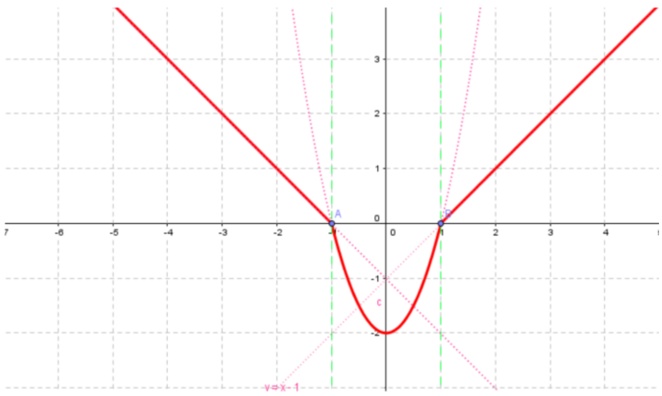
- $\boldsymbol{Dom\ f} = Dom\ f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\boldsymbol{Im\ f} = \mathbb{R}$
- Funtzio periodikoa da, π periododuna
- $tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg\ x \Rightarrow$ funtzio bakoitia (koordenatu-ardatzarekiko simetrikoa)




# 2. 7. ZATIKA DEFINITUTAKO FUNTZIOAK

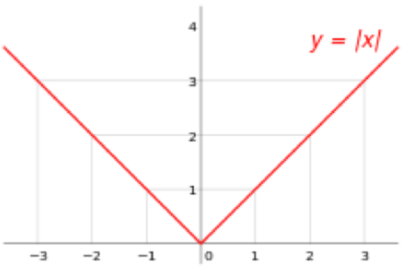
**Zatika definitutako funtzio** bat zenbait adierazpen aljebraiko dauzan funtzio bat da: x aldagai askea dagoan tartearen arabera, funtzio bat edo beste bat aplikatu behar da.

$$y = \begin{cases} -x-1 & \text{baldin eta } x \leq -1 \text{ bada.} \\ 2x^2-2 & \text{baldin eta } -1 < x < 1 \text{ bada.} \\ x-1 & \text{baldin eta } x \geq 1 \text{ bada.} \end{cases}$$



**260.Orr 13-14-15**

# 2.8 BALIO ABSOLUTUA




Zenbaki erreal bakoitzari haren balio absolutua egokitzen deutson funtzioa da.

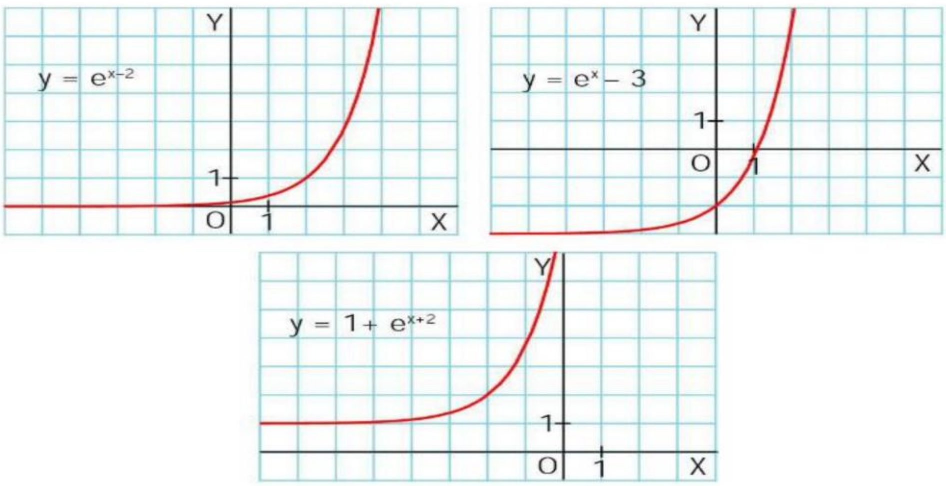
GRAFIKOTIK ANALITIKO ERAN ADIERAZTEKO

1. Kalkulatu funtzioaren balioa 0 egiten daben puntuak.
2. Aztertu tarte bakoitzan funtzioak balio positiboak edo negatiboak hartzen dauazan.
3. Tarte negatiboetan funtzioa moldatu:

Funtzioa **positiboa** dan tartean **f(x)** mantenduko da.

Funtzioa **negatiboa** dan tartean **–f(x)** definituko da.

**268.Orr 16-17-18**



**84.** **Adierazi funtzio esponentzialen hiruko hauek koordenatu-ardatz beretan:**

a) $f(x) = 2^x$ $\quad g(x) = 5^x$ $\quad h(x) = 10^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\quad h(x) = 10^x$

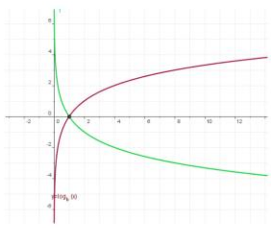
# 2. 5. FUNTZIO LOGARITMIKOAK

**Funtzio logaritmikoak $f(x) = log_a$ motakoak dira non $a > 0$ dan eta $a \neq 1$**

**Gogoan izan:**

**Ezaugarriak:**

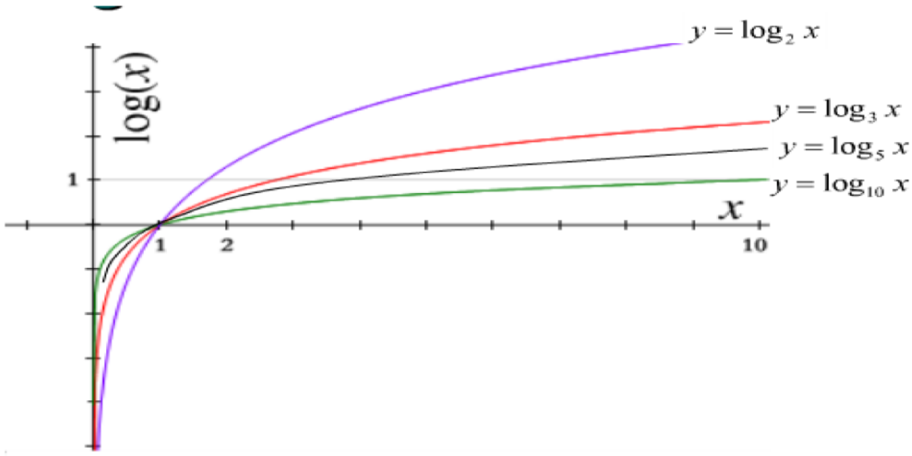
- $\boldsymbol{Dom\, f} = (\mathbf{0}, \infty)$
- $\boldsymbol{Im\, f} = \mathbb{R}$
- $\log_a 1 = 0$ danez, $(1,0)$ puntutik pasatu beti
- $\log_a a = 1$ danez, $(a, 1)$ puntutik pasatu beti
- $a > 1$ bada: gorakorra
- $0 < a < 1$ bada: beherakorra
- Asintota horizontala: $x = 0$



| x | $y = \log_2 x$ |
|---|---|
| 1/8 | -3 |
| 1/4 | -2 |
| 1/2 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 8 | 3 |

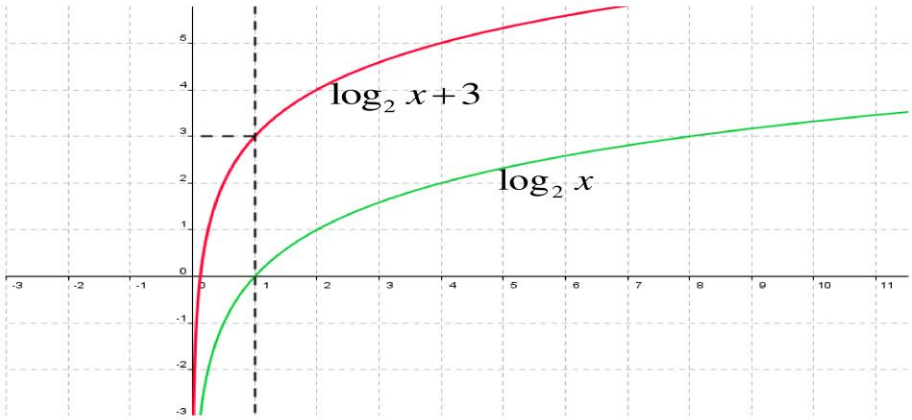
| x | $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ |
|---|---|
| 1/8 | 3 |
| 1/4 | 2 |
| 1/2 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | −1 |
| 4 | −2 |
| 8 | −3 |

10 . FUNTZIO LOGARITMIKOA

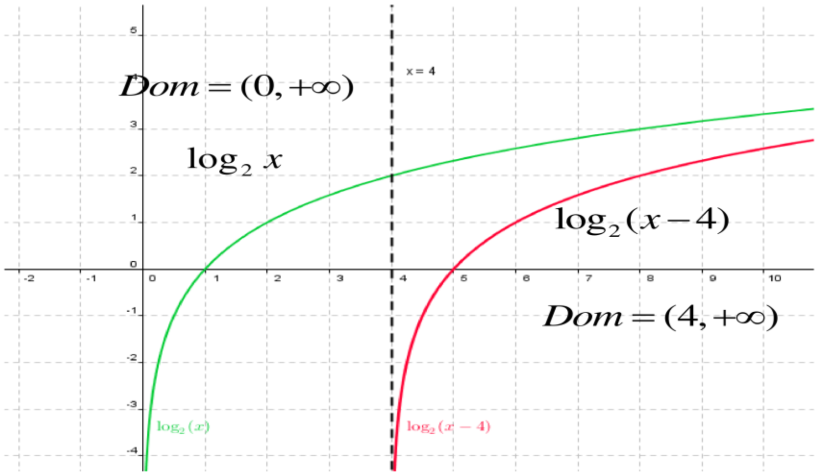





10 . FUNTZIO LOGARITMIKOA



## 10. FUNTZIO LOGARITMIKOA



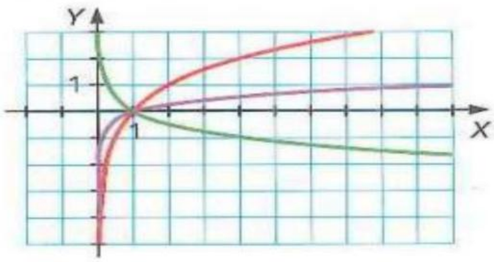



**88.** Lotu grafiko bakoitza dagokion funtzioarekin.

a) $f(x) = \log_{12} x$

b) $g(x) = \log_2 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

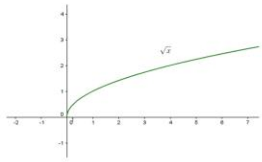


# 2. 3. FUNTZIO ERRODUNAK

Funtzio errodunetan x aldagaia erroketa ikurraren barruan dago: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

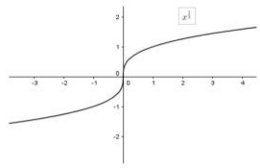
**Ezaugarriak:**

- **n bikoitia bada: $\boldsymbol{Dom\ f = g(x) \geq 0}$ dan tartea**
- **n bakoitia bada : $\boldsymbol{Dom\ f} = \mathbb{R}$**



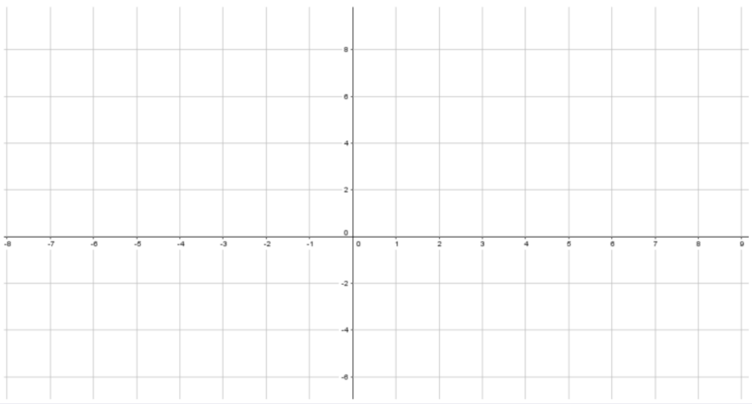
**Adierazpen grafikoa egiteko:**

- Definizio eremua zehaztu
- Kalkulatu $x$ −en balioa $f(x) = 0$ denerako
- Balio taularen bidez puntuak atera



**14.** Adierazi funtzio hauek grafikoki:

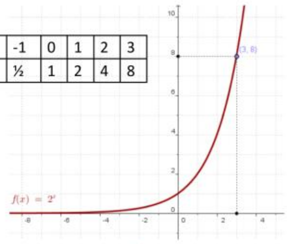
a) $f(x) = \sqrt{x+2}$  b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



# 2. 4. FUNTZIO ESPONENTZIALAK

<u>a > 1   eta   a ≠ 1</u>

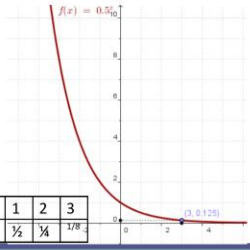
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | Y | ¼ | ½ | 1 | 2 | 4 | 8 |



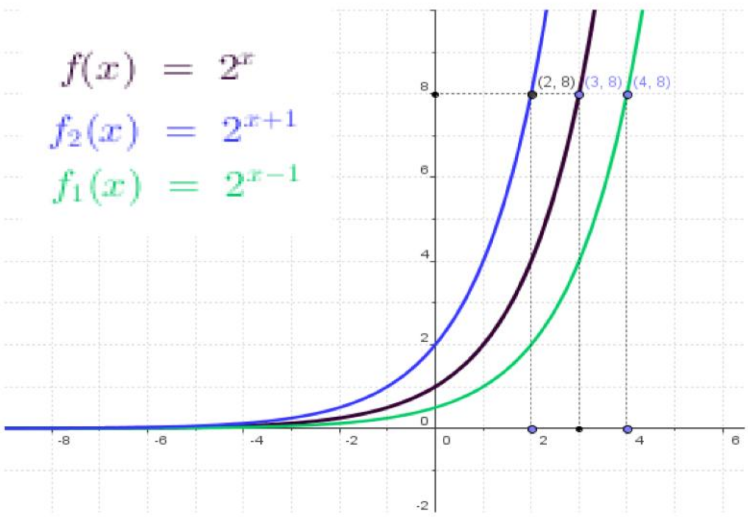

**Ezaugarriak:**

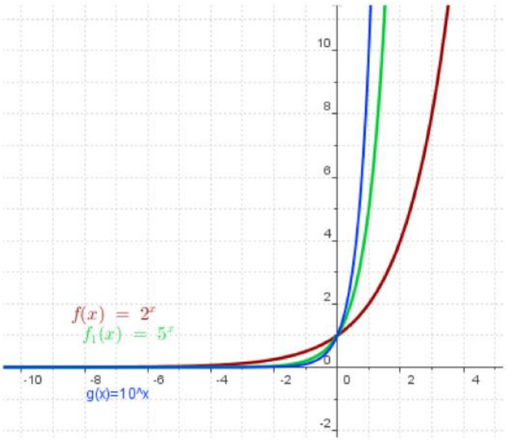
- $\boldsymbol{Dom\, f} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{Im\, f} = (\mathbf{0}, \infty)$
- $a^0 = 1$ danez, $(0{,}1)$ puntutik pasatu beti
- $a^1 = a$ danez, $(1, a)$ puntutik pasatu beti
- $a > 1$ bada: gorakorra
- $0 < a < 1$ bada: beherakorra
- Asintota horizontala: $y = 0$
- FUNTZIO ESPONENTZIAL ARRUNTENA: $f(x) = e^x$

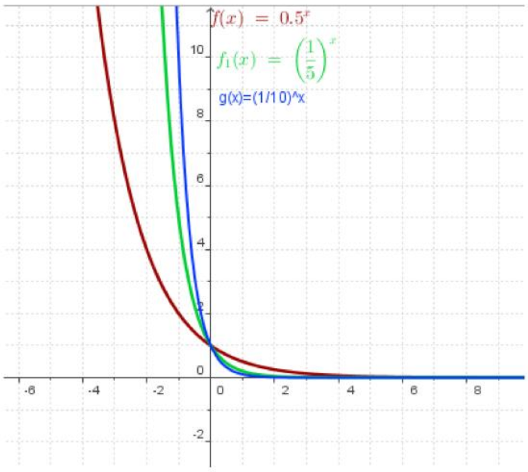
  $\boldsymbol{e}$ *zenbakia*: $\mathbf{2.7182818285}$ …



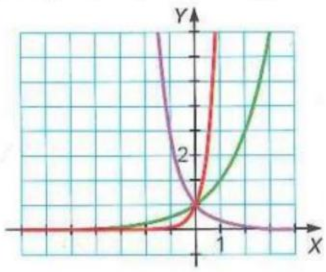

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | Y | 4 | 2 | 1 | ½ | ¼ | 1/8 |






**83.** Lotu adierazpen grafiko bakoitza dagokion funtzioarekin.




a) $f(x) = 12^x$ b) $g(x) = 2^x$ c) $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

- **FUNTZIO LOGARITMIKOAK**: zenbaki erreal positiboetarako soilik definituta.

$$f(x) = \log_5(x-6) \longrightarrow Dom\, f = (6, \infty)$$

- **FUNTZIO ESPONENTZIALAK**: zenbaki **erreal guztietarako** definituta.

$$f(x) = e^{x+2} \longrightarrow Dom\, f = \mathbb{R}$$

- **SINU ETA KOSINU ARRAZOIAK:** zenbaki **erreal guztietarako** definituta.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow Dom\, f = \mathbb{R}$$

- **TANGENTEA:** ez dago definituta $cos\alpha = 0$ danean.

$$f(x) = tanx \longrightarrow Dom\, f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

## 239. 1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN: ARIKETA

1 *Aurkitu funtzio hauetako bakoitzaren definizio-eremua:*

a) $y = \dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^3 - 8x^2 + 15x}$

b) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + x + 1}$

2 *Aurkitu funtzio hauetako bakoitzaren definizio-eremua:*

a) $y = \sqrt{x^3 - 8x^2 + 15x}$

b) $y = \sqrt{x^4 + x^2}$

c) $y = log(x^4 + x^2)$

3 *Aurkitu funtzio honen definizio-eremua:*

$$y = \frac{log(x-1)}{\sqrt{5x - x^2}}$$

**239.Orr 1,2,3,4,5,6**
**259.orr 1-2-3-4**

## SIMETRIA ETA PERIODIKOTASUNA: ARIKETAK

**54.** Esan ea baduen simetria motaren bat funtzio bakoitzak.

a) $f(x) = x^3 - 3x$ c) $f(x) = x^2 - x$

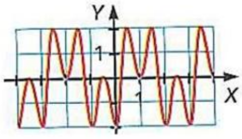
b) $f(x) = x^4 - 1$ d) $f(x) = x^4 - 2x^2$

**55.** Adierazi zer simetria mota duen funtzio bakoitzak.

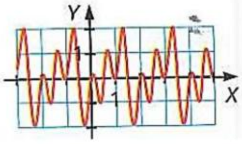
a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$

**56.** Kalkulatu funtzio bakoitzaren periodoa.

a)




b)



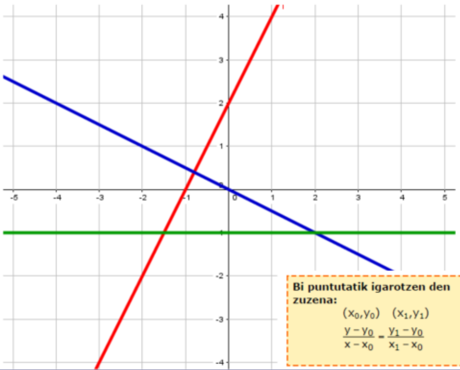



# 2. OINARRIZKO FUNTZIOAK

## 2. 1. FUNTZIO POLINOMIKOAK

- **Lehenengo mailako funtzioak: funtzio afinak**

$$\boldsymbol{f(x) = mx + n}$$



**Bi puntutatik igarotzen den zuzena:**

$(x_0, y_0)$ $(x_1, y_1)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Lehen mailako funtzio polinomiokoen grafikoa: **zuzena**

**Ezaugarriak:**

- $\boldsymbol{Dom\, f} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{m}$: **malda**
  - $m > 0$ bada: gorakorra
  - $m < 0$ bada: beherakorra
  - $m = 0$ bada: konstantea (f(x)=n)

  Gogoan izan: $m = \frac{d_2}{d_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x1}$

- $\boldsymbol{n}$: **ordenatua jatorrian** (OY ardatzarekiko ebakidura)

  ⇒zuzena $(0, n)$ puntutik pasatu

- **Bigarren mailako funtzioak: funtzio koadratikoak**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

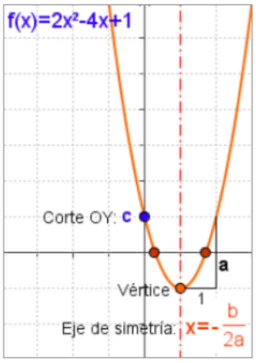
Grafikoa irudikatzeko pausuak:
1-Erpina kalkulatu
2-Kurbatura aztertu
3-Ebaketa puntuak
4-Balio taula

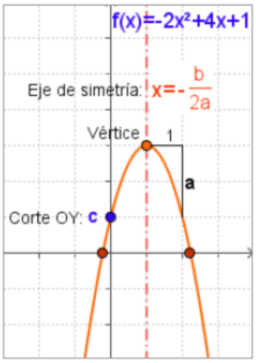
Funtzio koadratikoen adierazpen grafikoa: **parabola**

**Ezaugarriak:**

- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Parabolaren **erpina:** $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow \mathbf{E} = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- **Simetria ardatza:** $x = -\frac{b}{2a}$
- $a$**-k ahurtasuna** adierazi:
  - $a > 0$ bada: ahurra eta erpina minimoa
  - $a < 0$ bada: ganbila eta erpina maximoa
- $|a|$ **zenbat eta handiagoa, orduan eta itxiagoak adarrak**
- Ebaketa puntuak ardatzekaz:
  - $OY$ ardatzarekiko ebakidura: **x=0**
  - $OX$ ardatzarekiko ebakidura: $y = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

259.Orr 10



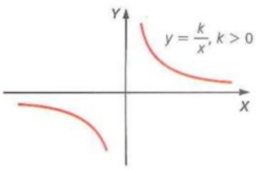

# 2. 2. FUNTZIO ARRAZIONALAK-ALDERANTZIZKO PROPORTZIONALTASUNEKO FUNTZIOAK

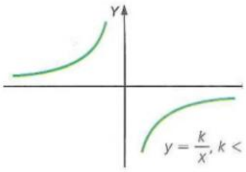
Funtzio arrazionalak adierazpen algebraikoa polinomioen arteko zatiketa modukoa daukienak dira: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ motatakoak, non $Q(x) \neq 0$ da.

**Alderantzizko proportzionaltasuneko funtzioa** mota honetako funtzio bat da:

$$f(x) = \frac{k}{x} \quad \text{non } k \neq 0$$

Funtzio honen grafikoari **HIPERBOLA** deritzo

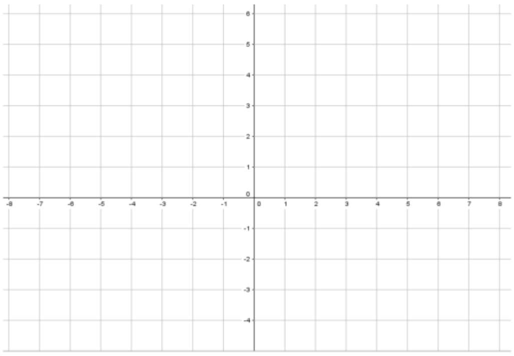


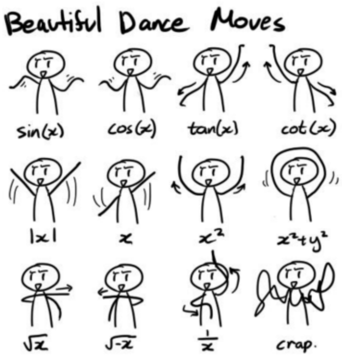




**Ezaugarriak:**

- $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asintota bertikala: $x = 0$
- Asintota horizontala: $y = 0$
- Funtzioak ez dau koordenatu-ardatzak ebakitzen.
- $k > 0$ bada: beherakorra eta 1. eta 3. koadrantean definituta
- $k < 0$ bada: gorakorra eta 2. eta 4. koadrantean definituta

a) $y = \dfrac{3x}{x-1}$  b) $y = \dfrac{x-2}{x-4}$  c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$  d) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$






# ANALISIA:

# 9.FUNTZIOAK

# 9. OINARRIZKO FUNTZIOAK

1.FUNTZIO KONTZEPTUA

2.OINARRIZKO FUNTZIOAK

- Funtzio polinomikoak: funtzio lineala eta funtzio koadratikoa
- Funtzio errodunak
- Funtzio arrazionalak
- Zatika definitutako funtzioak
- Funtzio esponentzialak
- Funtzio logaritmikoak
- Funtzio trigonometrikoak
- Zatika definitutako funtzioak
- Balio absolutudun funtzioak

# 1. FUNTZIO KONTZEPTUA

**Definizioa.-**

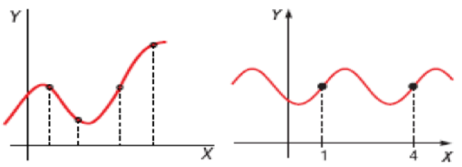
$\boldsymbol{f}$ aldagai errealeko **funtzio erreal** bat dala esango dogu baldin eta $\boldsymbol{x}$ zenbaki erreal bakoitzari ($x \in Dom\, f$), beste zenbaki bat, $\boldsymbol{y = f(x)}$, badagokio.

Beraz, funtzio bat bi aldagairen arteko **erlazio** bat da.

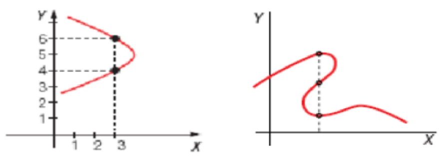
$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Im\, f \subseteq \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

$\boldsymbol{x}$ aldagaiari aldagai askea deritzogu eta $\boldsymbol{y}$ aldagaiari menpeko aldagaia.

**OHARRA: grafiko guztiak EZ dira funtzioak**

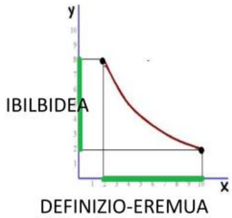


BAI, $x$-ren balio bakoitzari, $f(x)$ bakar bat dagokio



EZ dira funtzioak

# 1.1. DEFINIZIO EREMUA ETA IBILTARTEA

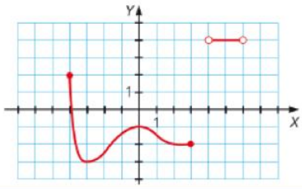


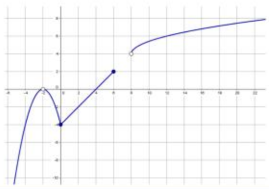

Demagun ondorengo funtzioa daukagula: $f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Im\, f \subseteq \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

- $f$ funtzioaren **definizio-eremua ($Dom\, f$):** funtzioa definituta dagoen balioek osatzen daben multzoa.
- $f$ funtzioaren **ibilbidea edo ibiltartea ($Im\, f$):** funtzioak hartzen dauazan balioen multzoa.

**4. Kalkulatu irudian agertzen dan adierazpen grafikoa dauan funtzioaren eremua eta ibiltartea.**



# 1. 2. DEFINIZIO-EREMUA KALKULATZEN

- FUNTZIO **POLINOMIKOAK:** zenbaki **erreal guztietarako** definituta.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \longrightarrow \quad Dom\, f = \mathbb{R}$$

- FUNTZIO **ARRAZIONALAK (izendatzailean x dabezan adierazpenak):** EZ dagoz definituta izendatzailea anulatzen dan puntuetan.

$$f(x) = \frac{12x - x^2}{x^2 - 9} \longrightarrow Dom\, f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

- **ERROTZAILE BIKOITIA** dabezan erroketak: errokizun positiboetarako edo nuluetarako soilik definituta.

$$f(x) = \sqrt{3x - 7} \quad \longrightarrow \quad Dom\, f = \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$$

# DERIBATUAK

| FUNTZIOA | DERIBATUA | FUNTZIOA | DERIBATUA |
|---|---|---|---|
| $k$ | $0$ | | |
| $x$ | $1$ | | |
| $kx$ | $k$ | | |
| $x^n$ | $n\cdot x^{n-1}$ | $u^n$ | $n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ |
| $kx^n$ | $k\cdot n\cdot x^{n-1}$ | $ku^n$ | $k\cdot n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\frac{-1}{x^2}$ | $\frac{1}{u}$ | $\frac{-1}{u^2}\cdot u'=\frac{-u'}{u^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\sqrt{u}$ | $\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^u$ | $e^u\cdot u'$ |
| $a^x$ | $a^x\cdot\ln a$ | $a^u$ | $a^u\cdot\ln a\cdot u'$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln u$ | $\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{u'}{u}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x\cdot\ln a}$ | $\log_a u$ | $\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'=\frac{u'}{u\cdot\ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\sin u$ | $\cos u\cdot u'$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\cos u$ | $-\sin u\cdot u'$ |
| $tg\,x$ | $(1+tg^2 x)\quad=\frac{1}{\cos^2 x}$ | $tg\,u$ | $(1+tg^2 u)\cdot u'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin u$ | $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ |
| $\arccos x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos u$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ |
| $arctg\,x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $arctg\,u$ | $\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$ |

a, k, n konstanteak dira   u, v,f eta g funtzioak dira

**BATUKETA**

$y=f(x)+g(x) \longrightarrow y'=f'(x)+g'(x)$

**ZENBAKIA BIDER FUNTZIOA**

$y=k\cdot f(x) \longrightarrow y'=k\cdot f'(x)$

**BIDERKAKETA**

$y=f(x)\cdot g(x) \longrightarrow y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

**ZATIKETA**

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ $\quad$ $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$