12. JATORRIZKOEN KALKULUA

2025-2026

1. JATORRIZKOAK.KALKULATZEKO OINARRIZKO ERREGELAK
   1. DEFINIZIOA
   2. PROPIETATEAK
   3. BERREKETA BATEN INTEGRALA **333/1, 354/8**
   4. INTEGRAL TRIGONOMOMETRIKOA **334/2,3 354/1, 7(arctg),9(arcsin),**
   5. INTEGRAL EXPONENTZIALA ETA LOGARITMIKOA **335/4, 354/3,4,6**

   354) 1→ 9

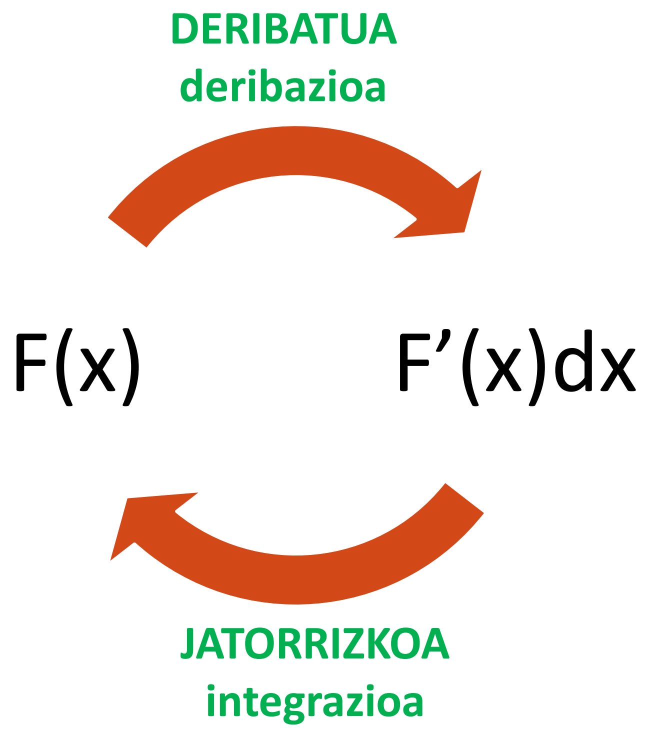
2. BEREALAKO INTEGRALEN ADIERAZPEN KONPOSATUA **333/1**
   1. ORDEZKAPEN METODOA **337/1, 338/2, 339/3,4 354/5,10,11 355/17,18,19 356/24**
3. ZATIKAKO INTEGRAZIOA **340/ 341/ 354/12,13**
4. FUNTZIO ARRAZIONALDUN INTEGRALAK **355/14,15,16**

21)b,d,c,f,g 22) b,d,e,g 24) a 26)a,c

1.1. DEFINIZIOA

Funtzio baten funtzio deribatua ezagututa, **jatorrizko funtzioa kalkulatzeko prozezuari** **integrazioa** deritzo.

$\int f(x)\,dx$ adierazpenari f(x)-en **integral mugagabea** edo **integral** esaten zaio. Eta euren kalkuluari **integrazioa** edo **integralen kalkulua.**



1.1. DEFINIZIOA

F(x) funtzioa f(x)-ren jatorrizkoa da baldin F'(x)=f(x) bada.

- $f(x)=3x^2$ funtzioaren jatorrizko zenbat funtzio aurki daikeguz?

F(x) JATORRIZKO FUNTZIOA		f(X) DERIBATUA
x^3 x^3+1 x^3-5 x^3+20 ..... x^3+k	←	$3x^2$

$$\int 3x^2 dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

$$\int 3x^2 dx = x^3 + 1 \ \ izan\ ere\ (x^3+1)' = 3x^2$$

Beraz infinitu jatorriko daude.

$$\int 3x^2 dx = x^3 + 120 \ \ izan\ ere\ (x^3+120)' = 3x^2$$

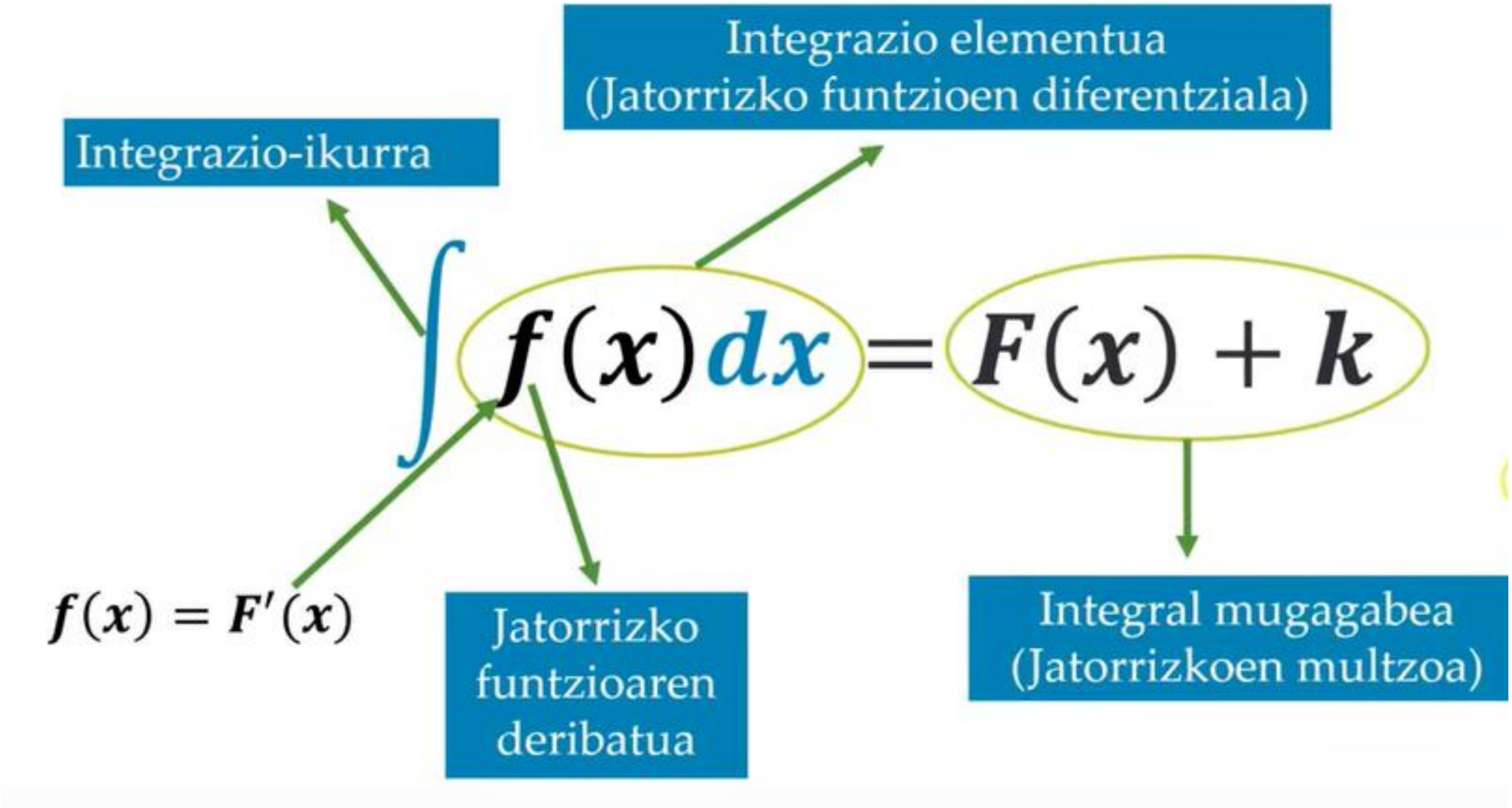
$$\int 3x^2 dx = x^3 - 5 \ \ izan\ ere\ (x^3-5)' = 3x^2$$

1.1.DEFINIZIOA

f(x) funtzioaren jatorrizko funtzio bat F(x) bada, **F(x)+k** adierazpenari, f(x) funtzioaren **integral mugagabe** edo integral deritzo $\int f(x)\,dx$

Hau da, baldin: F´(x) = f(x) bada

Orduan $\int f(x)dx = F(x) + k$ egiaztatzen da


Integrazio elementua
(Jatorrizko funtzioen diferentziala)
Integrazio-ikurra
$\int f(x)\,dx = F(x) + k$
$f(x) = F'(x)$
Jatorrizko funtzioaren deribatua
Integral mugagabea
(Jatorrizkoen multzoa)

1.2. PROPIETATEAK (332orr)

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)dx = \ F(x) + k\ bada \quad \int f(mx+n)\,dx = \frac{1}{m}F(mx+n) + k$$

BERREKETA BATEAN INTEGRALA

- $\int 1\,dx = x + k$
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ \ n \neq -1\ \ (n \in \mathbb{R})$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = ln\,|x| + k$

$$\int dx$$

$$\int 5\,dx =$$

$$\int x^2\,dx =$$

$$\int x^{-1} dx$$

Gogoratu

$D\,(ln\,x) = \dfrac{1}{x}\quad (x > 0)$

$D\,[ln\,(-x)] = \dfrac{1}{x}\quad (x < 0)$

$D\,(ln\,|x|) = \dfrac{1}{x}\quad (x \neq 0)$

Beraz:

$\int \dfrac{1}{x}\,dx = ln\,|x| + k$

- $\int 1 \, dx = x + k$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad n \neq -1 \quad (n \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-1} \, dx = ln\,|x| + k$

$$\int x \, dx$$

$$\int x^2 dx$$

$$\int x^3 dx$$

$$\int x^{-7} dx$$

$$\int x^{-20} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx =$$

$$\int \sqrt{x} \, dx =$$

$$\int 5x^4\,dx$$

$$\int x^4\,dx =$$

$$\int \frac{-2}{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{5}{x^4}\,dx$$

$$\int \frac{3}{x}\,dx =$$

- $\int 1\,dx = x + k$
- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad n \neq -1 \quad (n \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = ln\,|x| + k$

$$\int (x^2 - x + 1)dx =$$

$$\int 5 \cdot x^3 dx =$$

$$\int (4x^3 - x^2 + 3x - 7)dx =$$

$$\int \frac{3 - 2x}{x} dx =$$

$$\int \frac{x^2 - x + 5}{x^2} dx =$$

$$\int \left(\sqrt{5x} + \sqrt[3]{7x^2}\right) dx =$$

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x+5}\, dx$$

$$\int \frac{3}{3x-5}\, dx$$

$$\int \frac{1}{7x-2}\, dx$$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x}\, dx$$

$$\int \frac{x}{x^2-x}\, dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{2x^4 + 6x - 3}{x - 2} dx =$$

333.orr 1

354 .orri 8, 1

333) orri

1 Aurkitu:

a) $\int x^4\,dx$

b) $\int (5x^3-8x^2+2x-3)\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

f) $\int \frac{3}{x^2}$

g) $\int \frac{5}{6x^4}\,dx$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{3x}}\,dx$

i) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x^3}}{3x}\,dx$

➡ j) $\int (\sqrt{5}x-3)^4\,dx$

➡ k) $\int \sqrt[3]{(7x-6)^2}\,dx$

l) $\int \frac{5x^3+6x^2-\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{x}\,dx$

m) $\int \frac{2x^4-6x^3+5x}{x+2}\,dx$

➡ n) $\int \frac{5dx}{6-4x}$

ñ) $\int \frac{2x^4+6x-3}{x-2}\,dx$

o) $\int \frac{7x^4-5x^2+3x-4}{x^2}\,dx$

$$\boxed{\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, \text{ baldin eta } n \neq -1 \text{ bada}}$$

354.Orr
8

8 Adierazi zatidura $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ eran eta ebatzi:

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx$

b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$

d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$

f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

354) Orri 1

1 Kalkulatu honako integral ha

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2}\, dx$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\, dx$

b) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x}}$

d) $\int (x - sin\ x)\, dx$

354.Orr
2-3

2 Ebatzi integral hauek:

a) $\int (x^2+1)^2\, dx$

b) $\int (x-5)^3\, dx$

c) $\int \sqrt{3x+5}\, dx$

d) $\int (\cos x + e^x)\, dx$

3 Kalkulatu:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\, dx$

b) $\int \frac{7}{\cos^2 x}\, dx$

c) $\int \sin(x-4)\, dx$

d) $\int (e^{2x} + 3e^{-x})\, dx$

354.Orr
4

4 Aurkitu integral hauek:

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$

c) $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{-8}{1 + x^2} dx$

e) $\int \frac{3x}{1 + x^2} dx$

f) $\int \frac{x^2}{2 - x^3} dx$

Logaritmo nepertarra ala arkutangentea?

$$\int \frac{1}{x+5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{3x+5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

$$\int \frac{16x^3-8x}{4x^4-4x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{1}{4x^4-4x^2+1}\,dx$$

Arkutangentea

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arc\ tg\ x + k \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = arc\ tg\ f(x) + k$$

354.Orr 7

7 Ebatzi arku tangente motako integral hauek:

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2}$

b) $\int \frac{5dx}{100x^2+1}$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

f) $\int \frac{dx}{9+x^2}$

g) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

1.4 INTEGRAL TRIGONOMETRIKOAK

$$\int sinx\ dx$$

$$\int cosx\ dx$$

$$\int tgx\ dx$$

$$\int (1+tg^2x)\ dx = \int \frac{1}{cos^2x}\ dx$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

334.orr 2/ 335.orr3
354 1

1.4 INTEGRAL TRIGONOMETRIKOAK

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + k$$

$$\int tg\, x \, dx = -\ln|\cos x| + k$$

$$\int (1 + tg^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = tg\, x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arc\, tg\, x + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arc \sin x + k$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arc \cos x + k$$

334.orr 2/ 335.orr3
354 1

354.Orr
9

9 Aurkitu integral hauek, arku sinu motakoak direla jakinda:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\, dx$

d) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1-(ln\, x)^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arc\ sin\ x + k \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arc\ cos\ x + k$$

1.5.INTEGRAL EXPONENTZIAL ETA LOGARITMIKOAK (330 orri)

$$\int e^x\,dx = e^x + k \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{ln\,a}\,a^x + k$$

$$\int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - x + k \qquad \int log_a\,x\,dx = \frac{1}{ln\,a}\,(x\,ln\,x - x) + k$$

Adibideak: $\int (3\,sin\,x + 2\,cos\,x)\,dx = 3\int sin\,x\,dx + 2\int cos\,x\,dx = -3\,cos\,x + 2\,sin\,x + k$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,2x + k$$

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{4x^2}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{2}{3}}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + k = \frac{1}{6}\,arc\,tg\,\frac{2x}{3} + k$$

335.orr 4
354.Orr 3- 4-5-6

354.Orr 6 Esponentzialak

6 Aurkitu integral esponentzial hauek:

a) $\int e^{x-4}\,dx$

b) $\int e^{-2x+9}\,dx$

c) $\int e^{5x}\,dx$

d) $\int (3^x - x^3)\,dx$

2. BEREALAKO INTEGRALEN ADIERAZPEN KONPOSATUA (332orr)

KATEAREN ERREGELA

$$\emptyset(x) = f(x)^\circ g(x) = f(g(x))$$

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f\big(g(x)\big) + k$$

$$\int cos\,(x^2 - 5x + 3)\ (2x - 5)\ dx$$

$$\int \sqrt[3]{(x^4 + 5x)^2}\,(4x^3 + 5)\, dx$$

$$\int \sqrt[3]{cos^2 x}\,(-sin\, x)\, dx$$

BEREHALAKO INTEGRALEN ADIERAZPEN KONPOSATUA

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, \text{ baldin eta } n \neq -1 \text{ bada}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = ln\,|f(x)| + k$$

$$\int sin\,f(x) \cdot f'(x)\,dx = -cos\,f(x) + k$$

$$\int cos\,f(x) \cdot f'(x)\,dx = sin\,f(x) + k$$

$$\int [1 + tg^2\,f(x)]\,f'(x)\,dx = \int \frac{f'(x)}{cos^2\,f(x)}\,dx = tg\,f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,dx = arc\,tg\,f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\,dx = arc\,sin\,f(x) + k$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\,dx = arc\,cos\,f(x) + k$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{ln\,a}\,a^{f(x)} + k$$

$$\int ln\,f(x) \cdot f'(x)\,dx = f(x)\,ln\,f(x) - f(x) + k$$

$$\int tg\,f(x) \cdot f'(x)\,dx = -ln\,|cos\,f(x)| + k$$

337.orr 1

$$\boxed{\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, \text{ baldin eta } n \neq -1 \text{ bada}}$$

$$\int \sqrt[3]{x^3-4x^2-7x}\cdot(3x^2-8x-7)dx = \frac{(x^3-4x^2-7x)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + k = \frac{(x^3-4x^2-7x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3\sqrt[3]{(x^3-4x^2-7x)^4}}{4}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + k}$$

$$\int \frac{3x^2-8x-7}{x^3-4x^2-7x}dx = Ln|x^3-4x^2-7x| + k$$

$$\boxed{\int \sin f(x)\cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + k}$$

$$\int \sin(x^3-4x^2-7x)\cdot(3x^2-8x-7)\,dx = -\cos(x^3-4x^2-7x) + k$$

$$\boxed{\int \cos f(x)\cdot f'(x)\,dx = \sin f(x) + k}$$

$$\int \cos(x^3-4x^2-7x)\cdot(3x^2-8x-7)\,dx = \sin(x^3-4x^2-7x) + k$$

$$\boxed{\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + k}$$

$$\int e^{x^3-4x^2-7x}(3x^2-8x-7)dx = e^{x^3-4x^2-7x} + k$$

$$\boxed{\int ln\, f(x) \cdot f'(x)\, dx = f(x)\, ln\, f(x) - f(x) + k}$$

h) $\int ln\,(x^2+1)\, 2x\, dx$

$$\boxed{\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\, dx = arc\ cos\ f(x) + k}$$

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\, dx$

337.orr 1
Berehalakoak
edo ordezkapena

1 a) $\int cos^5\, x\,(-sin\ x)\,dx$ b) $\int \sqrt[3]{cos^2\,x}\,(-sin\ x)\,dx$ c) $\int e^{cos\ x}\, sin\ x\, dx$

d) $\int e^{x^3+x^2}(3x^2+2x)\,dx$ e) $\int tg\ x^2 \cdot 2x\, dx$ f) $\int \frac{3x^2}{1+x^6}\,dx$

g) $\int \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$ h) $\int ln\,(x^2+1)\,2x\,dx$ i) $\int \sqrt[3]{(x^4+5x)^2}\,(4x^3+5)\,dx$

354) 5

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k, \text{ baldin eta } n \neq -1 \text{ bada}$$

a) $\int \frac{dx}{3x-4}$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$

c) $\int \sqrt{3x-4}\,dx$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}}\,dx$

336 eta 337. orr

3. ZATIKAKO INTEGRAZIOA

Un Día Ví Una Vaca SIN RABO Vestida de Uniforme

$$\boxed{\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)}$$

Osagai bakoitza identifikatzeko **u(x)** eta **dv(x)** eskema bat erabiltzen da, aukeraketa errazagoa izateko:

A : Arku funtzioak

L : Logaritmoak

P : Polinomioak

E: Esponentzialak

S: Sinua, kosinua, tangentea

Batzutan metodo hau behin baino gehiagotan aplikatu behar da.

NOIZ ERABILI?

$$\int polinomioa \cdot \sin x \, dx \ edo \int polinomioa \cdot \cos x \, dx \ edo$$

$$\int polinomioa \cdot e^{f(x)} dx$$

$$\int polinomioa \cdot logaritmoa \, dx$$

$$\int polinomioa \cdot arcos \, dx$$

$\int sinx \cdot e^{f(x)} dx \quad edo \int cosx \cdot e^{f(x)} dx$ (bukle)

Formula nondik dator?

Biderketa baten deribatua kalkulatzeko formula hau da:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

eta idazkera diferentzialean adierazita, honela geratzen da:

$$d[u(x) \cdot v(x)] = du(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

Azkeneko batugaia askatzen badugu, honela geratzen da:

$$u(x)\, dv(x) = d[u(x) \cdot v(x)] - v(x)\, du(x)$$

Bi ataletan integratzen badugu, hau lortzen dugu:

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\, du(x)$$

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

Formula horrek modua ematen du $\int u\, dv$ integrala $\int v\, du$ integraletik abiatuta kalkulatzeko. Erabili ahal izateko, jakin behar dugu emandako integrala $\int u\, dv$ formakoa dela bereizten, eta $\int v\, du$ integrala aurrekoa baino ebazteko errazagoa dela ikusten.

$$\boxed{\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)}$$

A L P E S

A : Arku funtzioak
L : Logaritmoak
P : Polinomioak
E: Esponentzialak
S: Sinua, kosinua, tangentea

$$\int xe^x dx$$

Osagai bakoitza identifikatu:

$u(x)=x$ $du(x)=dx$

$dv(x)=e^x$ $v(x)= e^x$

Formulan ordezkatu:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k = (x-1)e^x + k$$

a) $I = \int x\, e^x\, dx$

b) $I = \int x^3 \ln x\, dx$

c) $I = \int \ln x\, dx$

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$$

A L P E S

A : Arku funtzioak
L : Logaritmoak
P : Polinomioak
E: Esponentzialak
S: Sinua, kosinua, tangentea

a) $I = \int x\, e^x\, dx$

b) $I = \int x^3 \ln x\, dx$

c) $I = \int \ln x\, dx$

340 eta 341. orr

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

A L P E S

1 Kalkulatu:

$$\int x \sin x \, dx$$

2 Kalkulatu:

$$\int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx$$

3 Kalkulatu:

$$\int x^4 e^x \, dx$$

4 Kalkulatu:

$$\int \sin^2 x \, dx$$

354.Orr 12,13

12 Erabili zatikako integrazioa honako integral hauek ebazteko:

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

b) $\int x^2\, ln\, x\, dx$

c) $\int 3x \cos x\, dx$

d) $\int ln\,(2x-1)\, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

f) $\int arc \cos x\, dx$

13 Ebatzi integral hauek zatikako integrazioa birritan erabiliz:

a) $\int x^2 \sin x\, dx$

b) $\int x^2\, e^{2x}\, dx$

c) $\int e^x \cos x\, dx$

d) $\int (x+1)^2\, e^x\, dx$

$$\boxed{\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)}$$

A L P E S

SELEKTIBITATEA

2017 UZTAILA

Kalkulatu ezazu integral hau:

$$\int (x+5)e^{3x}\,dx$$

$$I = \int \underbrace{(x+5)}_{P}\,\underbrace{e^{3x}}_{E}\,dx.$$

ZATIKAKO METODOA

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.}$$

$$\begin{cases} u = x+5 \longrightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} \longrightarrow v = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$I = (x+5)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot dx =$$

$$= (x+5)\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx = \boxed{\frac{x+5}{3}\cdot e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + k.}$$

4. FUNTZIO ARRAZIONALDUN INTEGRALAK

Funtzio arrazionalekin <u>orokorrean</u> jarraituko diran pausuak:

- 1. Zenbakitzailearen maila , izendatzailearen maila baino handiagoa edo bardina bada, **zatiketa egin. Deg (P(x) >= Deg Q(x)**

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \Rightarrow P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\cdot dx=\int C(x)\cdot dx+\int \frac{R(x)}{Q(x)}\cdot dx$$

- 2. Izendatzailea faktorizatu erroak bilatuz.
- **3.** Funtzio arrazionala zatiki sinpleagoetan deskonposatu.
- 4. Ebatzi integral barriak.

4. FUNTZIO ARRAZIONALDUN INTEGRALAK

- 4.1. IZENDATZAILEA **LEHEN MAILAKOA**

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + k$$

- 4.2. IZENDATZAILEAREN ERROAK **ERREAL BAKUNAK** DIRENEAN. Integratzerakoan logaritmo nepertarrak.

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

- 4.3. IZENDATZAILEAREN ERROAK **ERREAL ANITZAK** DIRENEAN. Integratzerakoan logaritmo nepertarrak eta berreketak.

$$\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

- 4.4. IZENDATZAILEAK **ERRO IRUDIKARIAK** DITU

$$\int \frac{2x-1}{x^3+3x}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}\right) dx$$

- (ez da sartzen)
- 4.5. Kasu berezia: Izendatzaileak errorik ez daukanean → EZ DA SARTZEN

4. FUNTZIO ARRAZIONALDUN INTEGRALAK.
4.1IZENDATZAILEA LEHEN MAILAKOA

- Hau jakinik: $\int \frac{A}{x-a}dx = Aln|x-a| + k$

Mota honetako guztiak egingo ditugu zatiketa eginez: $\int \frac{P(x)}{mx+n}dx$

$$\int \frac{2}{x-3}dx :$$

$$\int \frac{3x^2-7x+4}{2x-3}dx$$

4.2 IZENDATZAILEAREN ERROAK ERREAL BAKUNAK DIRENEAN

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{2}{x^2-1} \cdot dx \overset{1}{=} x + \int \frac{2}{x^2-1} \cdot dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^2+1 & 1 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}$$

$$2 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot dx = x + \int \frac{2}{x^2-1} \cdot dx = x + \int \frac{-1}{x+1} \cdot dx + \int \frac{1}{x-1} \cdot dx \overset{5}{=} x - \int \frac{1}{x+1} \cdot dx + \int \frac{1}{x-1} \cdot dx =$$

$$\overset{1}{=} x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \cdot dx$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} \cdot dx = \int \frac{1/2}{x} \cdot dx + \int \frac{-1/2}{x+2} \cdot dx + \int \frac{2}{x-1} \cdot dx \overset{5}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx \overset{6}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+2| + 2 \cdot \ln|x-1| + C$$

355. Orr

14 Resuelve:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-3)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x(x+4)}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

d) Erro anitzak

355. Orr 15

a) $\int \frac{1}{x^2 + x - 6}\, dx$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2 - 4}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2 - 25)(x - 4)}$

d) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}\, dx$

e) $\int \frac{4}{x^2 + x - 2}\, dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$

4.3 IZENDATZAILEAREN ERROAK ERREAL ANITZAK DIRENEAN

Izendatzailea faktorizatzerakoan, erro anitzak lortzen badira, (bikoitzak, hirokoitzak….), zatiki aljebraikoaren deskonposaketa zatikien arteko batuketa bezala, horrela da:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3}$$

4.3 IZENDATZAILEAREN ERROAK ERREAL ANITZAK DIRENEAN

$$\int \frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx$$

$$\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx}{x(x+2)^2}$$

$$2x^2+6x-4=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$

$$\int \frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x} \cdot dx = \int \frac{-1}{x} \cdot dx + \int \frac{3}{x+2} \cdot dx + \int \frac{4}{(x+2)^2} \cdot dx \overset{5}{=}$$

$$= -\int \frac{1}{x} \cdot dx + 3 \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx + 4 \cdot \int (x+2)^{-2} \cdot dx \overset{6}{=} -\ln|x| + 3 \cdot \ln|x+2| + \frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1} + C \overset{7}{=}$$

Erroak: x=0 (bikoitza), x=1 (hirukoitza) eta x=-1. Sei erro → 6 zatikitan deskonposatu

$$\int \frac{6x^5 - 7x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^6 - 2x^5 + 2x^3 - x^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} + \frac{F}{x+1}$$

355. Orr 16

a) $\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$

b) $\int \frac{-16}{x^2 - 2x - 15}\,dx$

c) $\int \frac{2x - 4}{(x-1)^2 (x+3)}\,dx$

d) $\int \frac{2x + 3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

e) $\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

f) $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4}\,dx$

355. Orr 20 (f ez)

355. Orr 26 c)

$$\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

2.1 ORDEZKAPEN METODOA (334orr)

Honako hau betetzen denean $h(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$ $\quad I = \int h(x)\,dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$

Aldagai aldaketa: $u = g(x) \quad du = g'(x)\,dx$

$$\int e^{\sqrt{x^2-2x}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}dx \qquad u = \sqrt{x^2-2} \qquad du = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}dx = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}dx$$

Emaitza aldagai aldaketa deseginda: $\int e^u du = e^u + k = e^{\sqrt{x^2-2x}} + k$

Ordezkapen metodoa, integralen kalkuluan metodorik zabalenetarikoa da, aldagai aldaketa oso desberdinak egon daitezkelako. Integralaren ebazpenaren zailtasuna, erabilitako aldagai aldaketaren arabera, oso desberdina izan daiteke.

INTEGRALEAN	ALDAGAI ALDAKETA ERAGINKORRENA
ERRO KARRATUA	$t=\sqrt{Polinomioa}$ edo $t=Polinomioa$
BESTE ERROAK	$t=\sqrt[m]{Polinomioa};$ m=errotzaileen mkt
FUNTZIO EXPONENTZIALA	$t=e^{nx}$ n=balio txikiena duena
FUNTZIO LOGARITMIKOAK	$t=ln(x)$

338/2 ,339/3,4
354/10, 11, 355/17,18

338.Orr Berealakoak edo ordezkapena

2 a) $\int \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5} \cdot (x^2 - 2x)\, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2\sqrt{x}}}} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

c) $\int \frac{cos^3\, x\, dx}{sin^4\, x}$

d) $\int (x^2 + 1)\, ln\, (x^3 + 3x)\, dx$

e) $\int \frac{sin\, x\, cos\, x}{1 + sin^4\, x}\, dx$

f) $\int e^{x + \sqrt{x}} \left(\frac{6x + 3\sqrt{x}}{x} \right) dx$

339.Orr

ordezkapena

3 $\int \sqrt{x-4}\,(x+5)\,dx$

4 $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-1}{\sqrt{(x-1)^3}}\,dx$

354.Orr 10
ordezkapena

10 Ebatzi integral hauek:

a) $\int \sin x \cos x \, dx$

b) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^5 x}$

c) $\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

d) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$

354.Orr 11
ordezkapena

11 Ebatzi honako integral hauek:

a) $\int \sqrt{x^2 - 2x}\,(x-1)\,dx$

b) $\int \frac{arc\ sin\ x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

c) $\int \sqrt{(1+cos\ x)^3}\ sin\ x\,dx$

d) $\int \frac{(1+ln\ x)^2}{x}\,dx$

e) $\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx$

f) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

355.Orr 17
Ordezkapen Metodoa (erroak)

Erabili ordezkapen-metodoa integral hauek ebazteko:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

b) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

Ez dago liburuan

355.Orr. 18 Ordezkapen Metodoa (erroak)

Ebatzi integral hauek aldagai-aldaketa bat eginez:

a) $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

b) $\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

e) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

4.4. IZENDATZAILEAK ERRO IRUDIKARIAK DITU (ez da sartzen)

Ez da sartzen

346.orri 4.4.1. Lehenengo kasua (Izendatzaileko binomioa arkutangeteren deribatura moldatu)

5 a) $\int \frac{dx}{3x^2+3}$ b) $\int \frac{dx}{9x^2+3}$ c) $\int \frac{dx}{6x^2+3}$ d) $\int \frac{dx}{7x^2+11}$

4.4.2. Bigarren kasua (Izendatzaileko polinomioa arkutangeteren deribatura moldatu)

6 a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ b) $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$ c) $\int \frac{dx}{x^2+3x+8}$ d) $\int \frac{dx}{2x^2-12x+26}$

4.4.3. Hirugarren kasua

Jatorrizkoa ezin da izan hasiera batean arkutangentea, beraz moldatu egiten da zenbakitzailea logaritmo nepertar baten deribatua izateko.

7 a) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}\,dx$ b) $\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ c) $\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ d) $\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx$

8 Calcula $\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3x+3}{x^3+2x^2+3x}\,dx$.

4.4. IZENDATZAILEAK ERRO IRUDIKARIAK DITU

4.4.1. Lehenengo kasua - Izendatzaileko binomioa arkutangeteren deribatura moldatu

5 a) $\int \frac{dx}{3x^2+3}$ b) $\int \frac{dx}{9x^2+3}$ c) $\int \frac{dx}{6x^2+3}$ d) $\int \frac{dx}{7x^2+11}$

4.4. IZENDATZAILEAK ERRO IRUDIKARIAK DITU

Ez da sartzen

Formula hau erabil daiteke

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b} arctg\left(\frac{x+a}{b}\right)}$$

4.4.2. Bigarren kasua - Izendatzaileko polinomioa arkutangeteren deribatura moldatu

6 a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$ b) $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$ c) $\int \frac{dx}{x^2+3x+8}$ d) $\int \frac{dx}{2x^2-12x+26}$

4.4. IZENDATZAILEAK ERRO IRUDIKARIAK DITU

Ez da sartzen

Jatorrizkoa ezin da izan hasiera batean arkutangentea, beraz moldatu egiten da zenbakitzailea logaritmo nepertar baten deribatua izateko.

4.4.3. Hirugarren kasua

7 a) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+10}\,dx$ b) $\int \frac{x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ c) $\int \frac{7x-11}{x^2-4x+10}\,dx$ d) $\int \frac{5x+12}{x^2+3x+10}\,dx$

Ez da sartzen

4.4. IZENDATZAILEAK ERRO IRUDIKARIAK DITU

(Adibidez: 356orr 26b) (konpleto)

$$\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}dx = \int\left(1+\frac{2x-8}{x^2-2x+5}\right)dx = \int dx + \int\frac{2x-8}{x^2-2x+5}dx$$

$$I_1 = \int\frac{2x-8}{x^2-2x+5}dx = \int\frac{2x-2-6}{x^2-2x+5}dx = \int\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx - 6\int\frac{1}{x^2-2x+5}dx = ln\,(x^2-2x+5) - 6I_2$$

$$I_2 = \int\frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int\frac{1}{x^2-2x+1+4}dx = \int\frac{1}{(x-1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{2}+k = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{2}+k$$

$$I_1 = ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\,tg\,\frac{x-1}{2}+k$$

$$I = x + ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\,tg\,\frac{x-1}{2}+k$$