INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

$$I=\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

GRADO DEL NUMERADOR P(x) ES MAYOR O IGUAL QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR Q(x)

Dividimos $P(x)$ entre $Q(x)$. $P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$, donde $\text{grado}R(x) < \text{grado}Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)\cdot C(x)+R(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\right)dx=\int C(x)dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

La primera integral es inmediata y la segunda se realiza por el método que explico a continuación:

Ejemplo $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2-1}dx=\int 1dx+\int\frac{-2}{x^2-1}dx=x+\int\frac{-2}{x^2-1}dx$

GRADO DEL NUMERADOR P(x) ES MENOR QUE EL GRADO DEL DENOMINADOR Q(x)

1. FACTORIZAMOS EL DENOMINADOR: $Q(x)=C(x-a)(x-b)\ldots$
2. NOS ENCONTRAMOS CUATRO CASOS DEPENDIENDO DE SI LAS RAÍCES SON
   a) REALES SIMPLES: $x=a$, $x=b$, ...
   b) REALES MÚLTIPLES: $x=a$, $x=a$
   c) APARECEN SIMPLES Y MÚLTIPLES: $x=a$, $x=b$, $x=b$
   d) NO TIENE RAÍCES REALES.

Ejemplos

a) $\displaystyle\int\frac{5x+3}{x^2-4}dx$	$x^2-4=(x+2)(x-2)$.	Dos raíces simples $x=2$, $x=-2$
b) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{x^2-4x+4}dx$	$x^2-4x+4=(x-2)^2$.	Una raíz doble $x=2$
c) $\displaystyle\int\frac{3x}{x^3-x^2}dx$	$x^3-x^2=x^2(x-1)$.	Tres raíces: una simple $x=1$ y una doble $x=0$
d) $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx$	$x^2+1=0$.	No tiene raíz real.

A RAÍCES REALES SIMPLES

Descompondremos la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\dots$$

Para hallar A B... operamos el segundo miembro haciendo el m.c.m. de los denominadores (siempre es $Q(x)$).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A(x-b)(x-c)\cdots+B(x-a)(x-c)\cdots+}{Q(x)}$$

E igualamos $P(x)=A(x-b)(x-c)\cdots+B(x-a)(x-c)\cdots+$

Tenemos una ecuación que se verifica siempre. Para hallar los valores de A, B,... basta sustituir la "x" por los valores de las raíces. De esta forma, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son los valores de A, B, C...

Una vez hallados los valores de A, B, C, sustituimos en la integral e integramos cada una de la integrales, obteniendo **logaritmos**.

EJEMPLO $\int \frac{2x-1}{x^2-x}dx$

Descomponemos el denominador: $x^2-x=x(x-1)$. Las raíces son $x=0$, $x=1$.

$$\frac{2x-1}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \quad \text{Operando} \quad \frac{2x-1}{x^2-x}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

Entonces igualamos los numeradores $2x-1=A(x-1)+Bx$

Sustituimos x por los valores de las raíces:

$x=0$, $-1=A(-1)$, $A=1$

$x=1$, $1=B\cdot 1$, $B=1$

Sustituimos en la integral

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln|x|+\ln|x-1|+C$$

B RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Si la raíz $x=a$ es doble, descompondremos la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$$ Raíz doble

Para hallar A, B ... operamos el segundo miembro haciendo el m.c.m. de los denominadores (siempre es Q(x)).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A(x-a)+B}{Q(x)}$$ E igualamos $P(x)=A(x-a)+B$

Para hallar los valores de A, B... basta sustituir la "x" por las dos raíces. De esta forma, se obtiene un sistema de ecuaciones cuyas soluciones son los valores de A, B ...

Una vez hallados los valores de A, B... sustituimos en la integral e integramos cada una de la integrales, obteniendo **logaritmos y potencias**.

EJEMPLO $\int \frac{2x-1}{x^2-4x+4}dx$

Descomponemos el denominador $x^2-4x+4=(x-2)(x-2)$. Las raíces son $x=2$ (doble)

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$ operando $$\frac{2x-1}{x^2-4x+4}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}$$

Entonces, igualamos los numeradores $2x-1=A(x-2)+B$

Debemos hallar los valores de A y B, para ello damos dos valores a la "x", por ejemplo el valor de la raíz y $x=0$:

$x=2,\ 3=B$

$x=0,\ -1=A\cdot(-2)+3,\ A=2$

Sustituimos en la integral

$$\int \frac{2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}dx=2Ln|x-2|+3\cdot\int(x-2)^{-2}dx=2Ln|x-2|+3\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C$$

C RAÍCES REALES SIMPLES Y MÚLTIPLES

Si la raíz $x=a$ es doble y $x=b$ simple, descompondremos la fracción de la siguiente forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$$

Para hallar A, B ... operamos el segundo miembro haciendo el m.c.m. de los denominadores (siempre es $Q(x)$).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A(x-a)(x-b)+B(x-b)+C(x-a)^2}{(x-a)^2(x-b)}$$

E igualamos $P(x)=A(x-a)(x-b)+B(x-b)+C(x-a)^2$

Para hallar los valores de A, B... basta sustituir la "x" por las raíces y los valores necesarios de "x". De esta forma se obtiene un sistema de ecuaciones, cuyas soluciones son los valores de A, B ...

Una vez hallados los valores de A, B ... sustituimos en la integral e integramos cada una de la integrales obteniendo <u>logaritmos y potencias</u>.

D SIN RAÍCES REALES

Primero separamos la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax}{Q(x)}+\frac{B}{Q(x)}$.

La primera de las fracciones se resuelve con <u>logaritmos</u>.

Para la segunda fracción escribiremos $Q(x)$ de la siguiente forma $Q(x)=(x-a)^2+b^2$ igualando término a término

$$Q(x)=b^2\left(\frac{(x-a)^2}{b^2}+1\right)=b^2\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right)$$

$$\frac{B}{Q(x)}=\frac{B}{b^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1}$$

Resolviendo esta última con <u>arcotangentes</u>.