13. INTEGRAL MUGATUA

2025-2026

13. INTEGRAL MUGATUA

1.2.KURBA BATEN AZPIKO AZALERA

3.INTEGRALAREN PROPIETATEAK (364-orri)

5.BARROW-ren ERREGELA

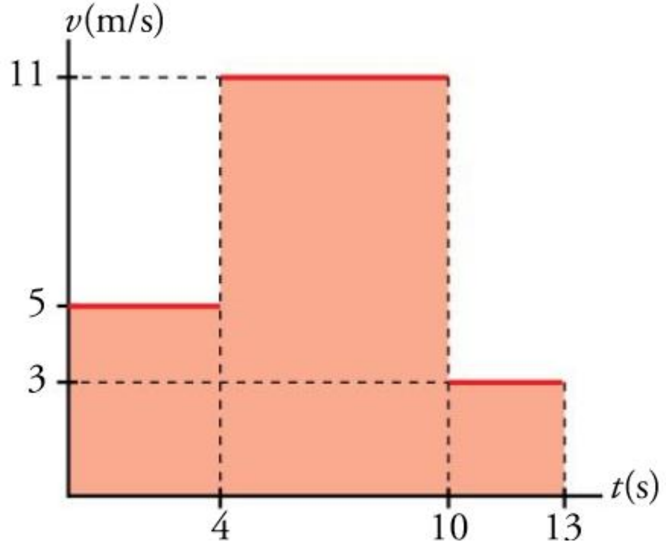
6. AZALERAK INTEGRALAREN BIDEZ

- 6.1. AZALERA OX ARDATZAREKIN 379orr-6-7-8-9-10-11
- 6.2. AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN 379orr-14-15-16-17-18-22-30

ZATIKA DEFINITUTAKO INTEGRALA

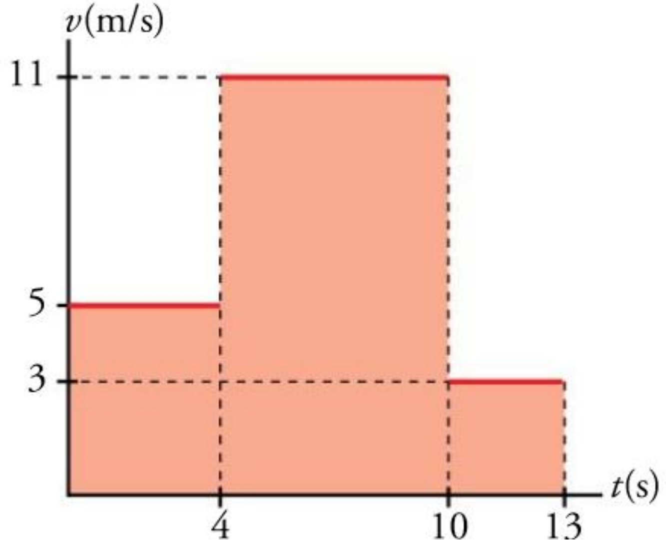
INTEGRALAK PARAMETROEKIN

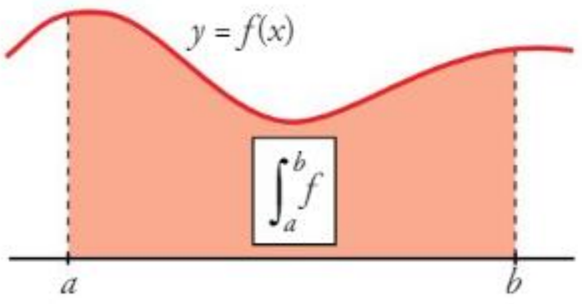
1.KURBA BATEN AZPIKO AZALERA



Nola kalkulatu higikari batek egindako espazioa?
Abiadura-denbora grafikoan?

1.KURBA BATEN AZPIKO AZALERA



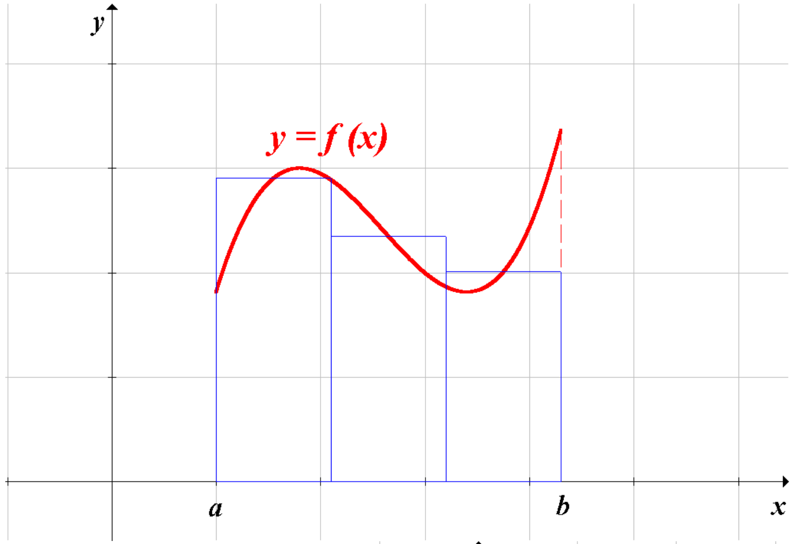


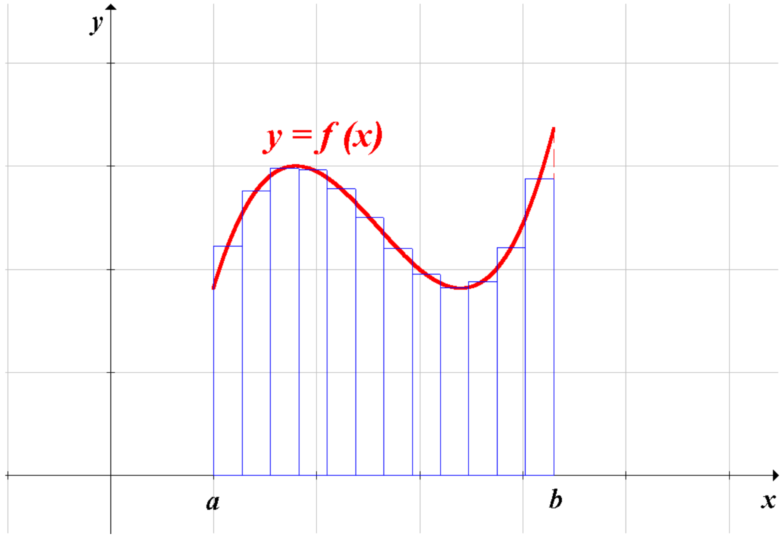
Nola kalkulatu higikari batek egindako espazioa? Abiadura-denbora grafikoan?

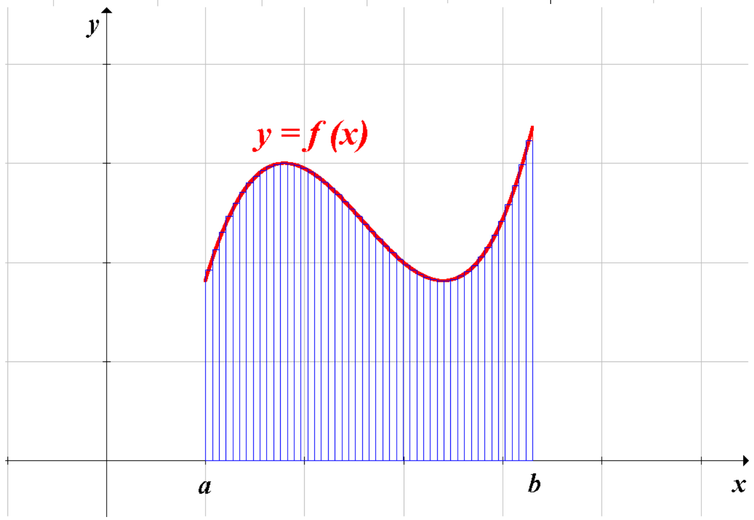
Eta abiadura ez bada konstante mantentzen esparru bakoitzean?

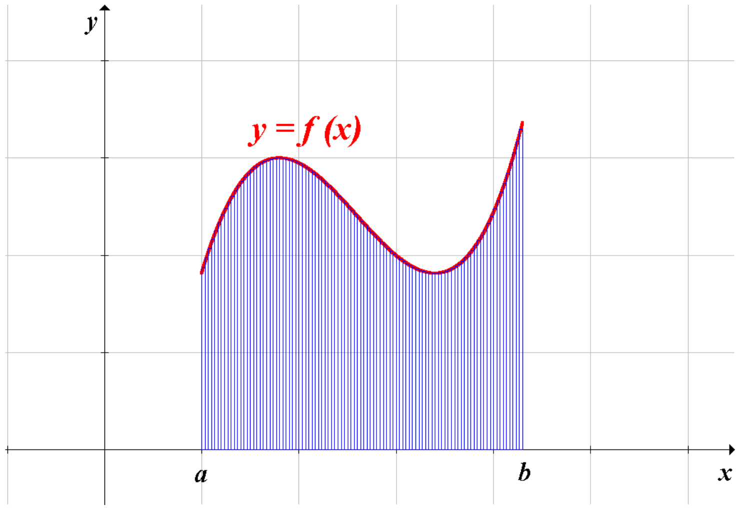
Gero eta laukizuzen gehiago hartzen baditugu, lorturiko hurbilketa onargarriagoa da. Horrela jarraitzen bada, laukizuzenen kopurua handituz, limitean azaleren baturak benetako azaleraren balioa ematen digu. Batura infinito honi *a* eta *b*-ren arteko funtzioaren integral mugatua deritzo.

$$I = \int_a^b f(x)dx$$







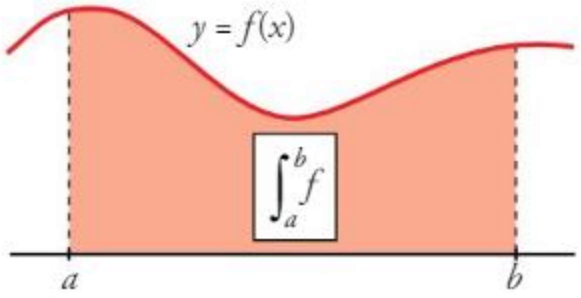


1.2.KURBA BATEN AZPIKO AZALERA

y=f(x) funtzioaren grafikoaren eta X ardatzaren artean [a,b] tartean dagoen azalera honetan izendatzen da

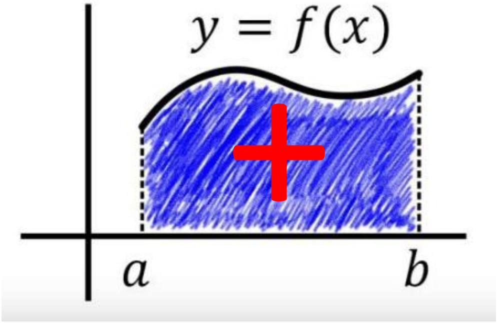
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

f(x)-en a eta b arteko integrala irakurtzen da.



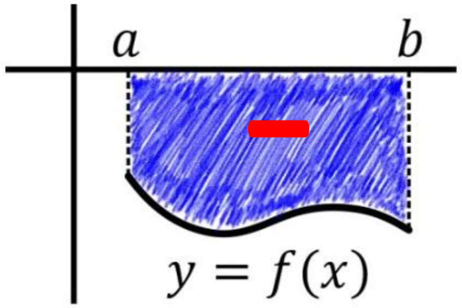
FUNTZIO INTEGRAGARRIA

f(x) jarraia eta monotonoa (gorakorra edo beherakorra) bada [a,b] tartean integragarria da.



Ohiko funtzio guztiak integragarriak dira mugatuta dauden edozein tartetan.

Esparrua X ardatzaren AZPITIK badago, integrala NEGATIBOA da, eta GAINETIK badago POSITIBOA

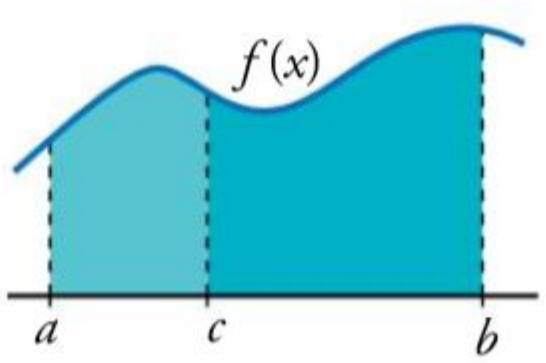


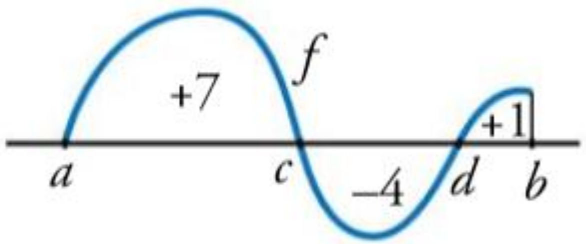
3.INTEGRALAREN PROPIETATEAK (364-orri)

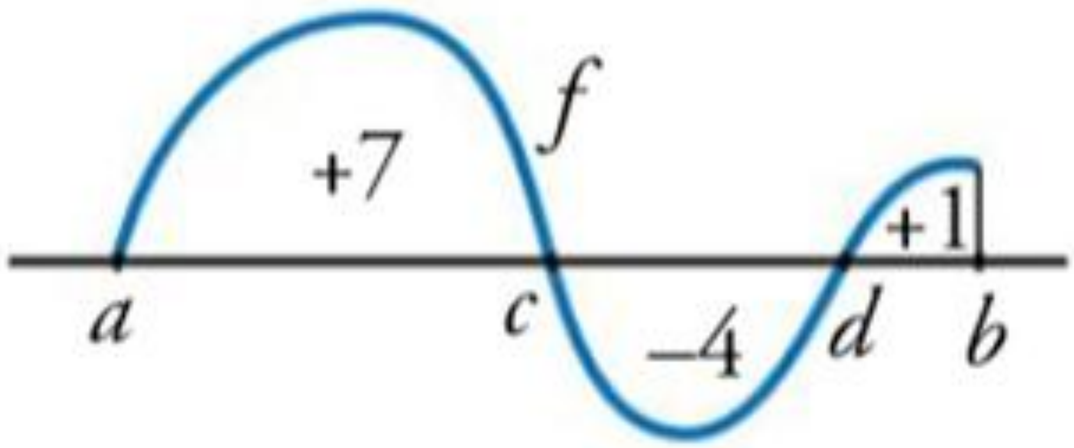
1.- $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$, *edozein dela ere.*

2.- f(x)≥0 eta integragarria bada [a,b] tartean $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ eta f(x) ≤ 0 denean $\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

3.- $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$ c ϵ (a,b) ⟶ $\int_3^{10} x^2dx = \int_3^7 x^2dx + \int_7^{10} x^2dx$






f
+7
+1
a
c
−4
d
b

3.INTEGRALAREN PROPIETATEAK (364-orri)

4.- $\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f+g)(x)dx} \longrightarrow$

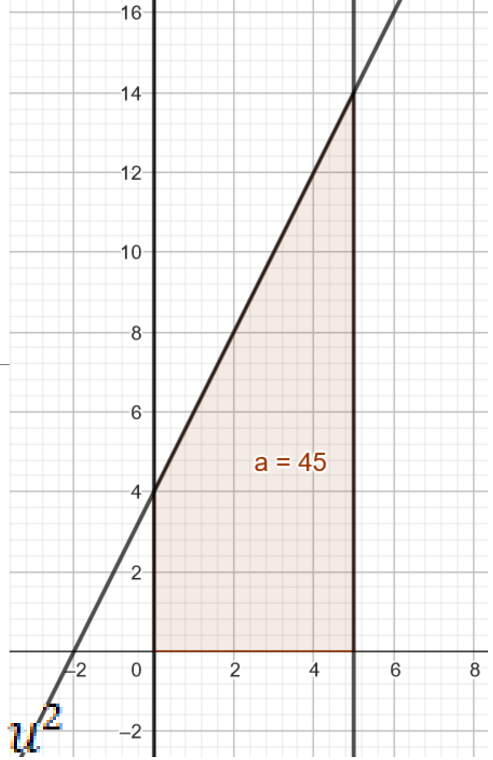
$$\int_1^{10} \left[x^2 + x^3\right] dx = \int_1^{10} x^2 dx + \int_1^{10} x^3 dx$$

5.- $\boxed{\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx} \longrightarrow \int_1^7 3 \cdot x^5 dx = 3 \cdot \int_1^7 x^5 dx$

6.- f(x) ≤ g(x), $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

7.- $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx} \longrightarrow \int_1^5 x^3 dx = -\int_5^1 x^3 dx$

5.BARROW-ren ERREGELA



Nola kalkulatu **f(x) = 2x+4** zuzena eta **X ardatzaren** arteko azalera [0,5] tartean?

1. **MODUA : Irudi lauen azalerak:**

$$\int_0^5 f(x)dx = A(laukizuzena) + A(triangelua) = 4 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 5}{2} = 45\, u^2$$

2. **MODUA :BARROWren legea**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (2x+4)dx = \left[x^2 + 4x + k\right]_0^5 =$$

$$(5^2 + 45 + k) - (0^2 + 40 + k) = 25 + 20 = 45\, u^2$$

5.BARROW-ren ERREGELA

f(x) **<u>jarraitua</u>** bada [a,b] tartean, eta F(x) jatorrizkoa bada, orduan **Barrow-ren erregela** betetzen da.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1. adibidea

$$\int_1^3 (x - x^2 + 5)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 5x\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{27}{3} + 15 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 5\right) =$$

$$= \frac{9}{2} - 9 + 15 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 5 = 4 + 1 + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

2. adibidea

$$\int_0^2 (3x - 1)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_0^2 = 6 - 2 - (0 - 0) = 4$$

368)1

5.BARROW ERREGELA

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Adibidez:

$$\int_2^5 (3x^2 - 2x + 3)dx =$$

368)1 $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)dx =$

379.Orr 1 eta 4

1 Kalkulatu integral hauek:

379.orr

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx$ d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

$\sqrt{x^2+1} = t$

$x^2+1 = t^2$

$\cancel{2}x\,dx = \cancel{2}t\,dt$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} = \int dt = t + K = \sqrt{x^2+1} + K.$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+1} + K\right]_0^2 = (\sqrt{5} + \cancel{K}) - (\sqrt{1} + \cancel{K})$$

$$= \boxed{\sqrt{5} - 1}$$

1 Kalkulatu integral hauek:

379.orr

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$dx = 2t\,dt$

$$I = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2-1}{\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + k = 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \sqrt{x}\right) + k.$$

$$\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\sqrt{64} - 2\sqrt{4}\right)}_{F(4)} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right)}_{F(1)} =$$

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{8}{3}}$$

1 Kalkulatu integral hauek:

379.orr

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_{1/e}^{e} 2\,ln\,x\,dx$ d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx = 2\int_{1/e}^{e} \ln x\,dx$ $\left\{\begin{array}{l} u=\ln x \rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx \rightarrow v=x \end{array}\right.$

$I = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x$

$\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx = 2\left[x\ln x - x + k\right]_{1/e}^{e} = 2\left[\cancel{(e\underbrace{\ln e}_{1} - e)}^{0} - \left(\frac{1}{e}\underbrace{\ln\frac{1}{e}}_{-1} - \frac{1}{e}\right)\right]$

$= 2\left(0 - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right)\right) = \boxed{\frac{4}{e}}$

1 Kalkulatu integral hauek:

379.orr

a) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ b) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int_{1/e}^{e} 2\ln x\,dx$ d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

d) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Calculamos una primitiva:

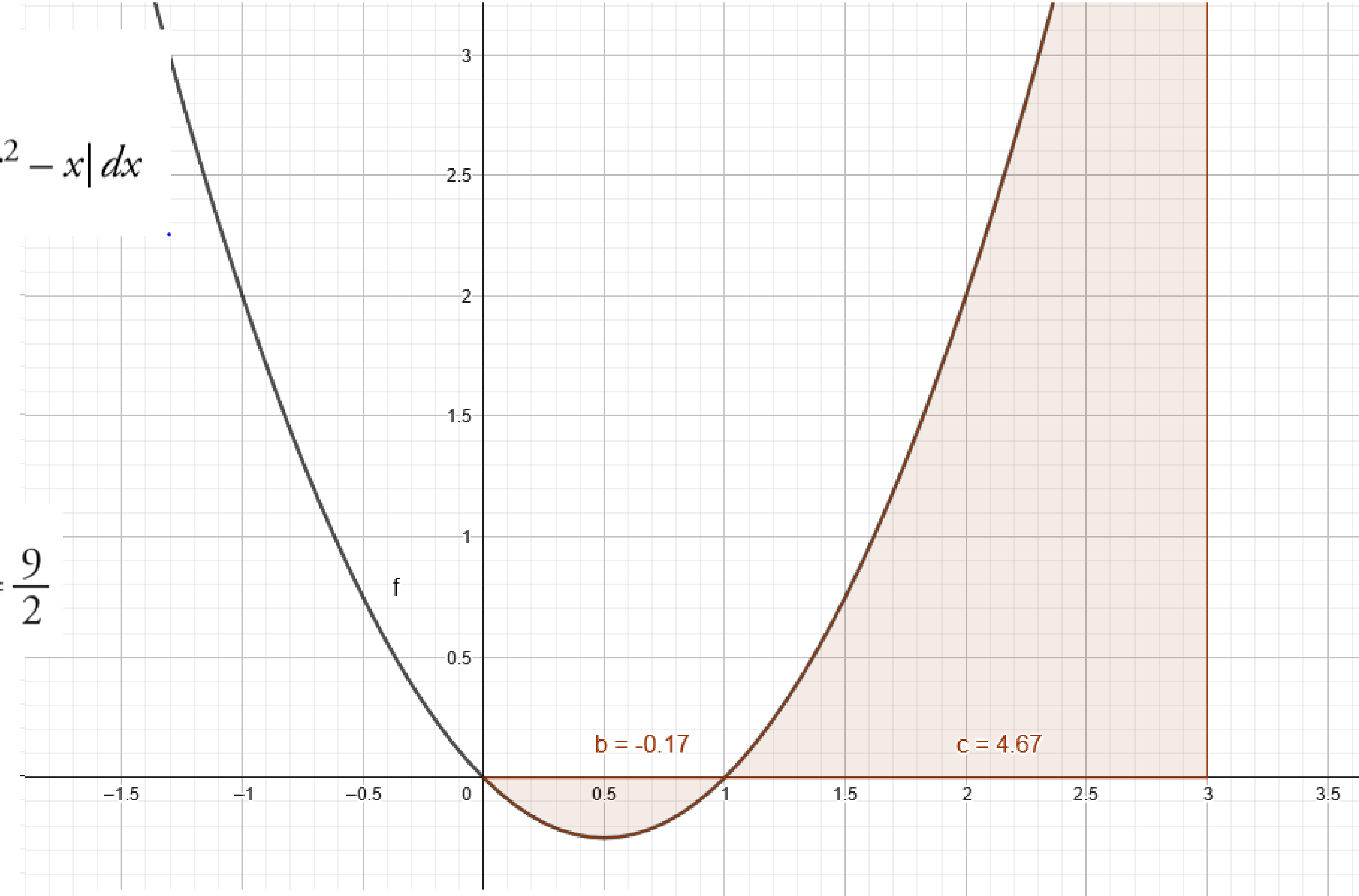
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - arc\ tg\ x$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \left[x - arc\ tg\ x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$= \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$$

4 Aurkitu:

$$\int_0^3 (x^2 - x)\,dx \quad \text{eta} \quad \int_0^3 |x^2 - x|\,dx$$



a) Kalkulatu f(x) ren integral mugatua [0,3] tartean

$$\int_0^3 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

b) Kalkulatu f(x), eta 0X ardatza [0,3] tartean mugatutako azalera.

$$A = -\int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^3 (x^2 - x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$

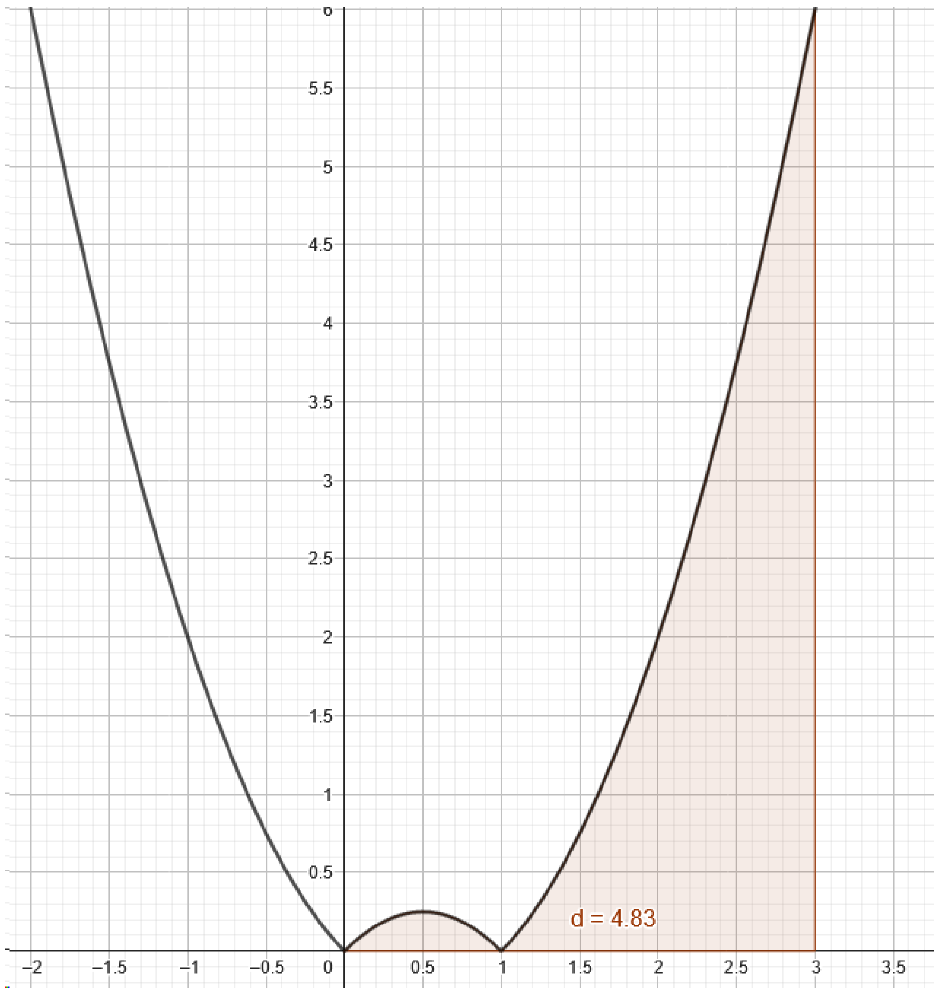
4 Aurkitu: $\int_0^3 |x^2 - x|\,dx$

$$\int_0^3 (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ -(x^2 - x) & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$$

$$\int_0^3 |x^2 - x|\,dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx + \int_1^3 (x^2 - x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$



6. AZALERAK INTEGRALAREN BIDEZ

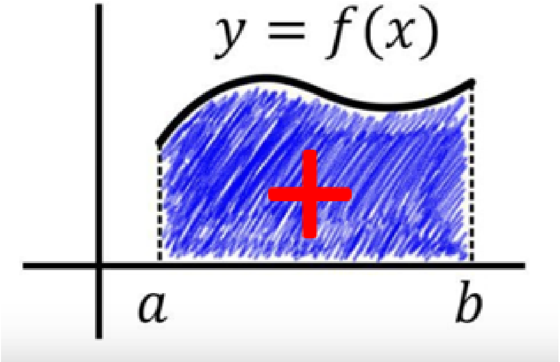
https://www.geogebra.org/m/MQWTjB4u

6.1. AZALERA OX ARDATZAREKIN

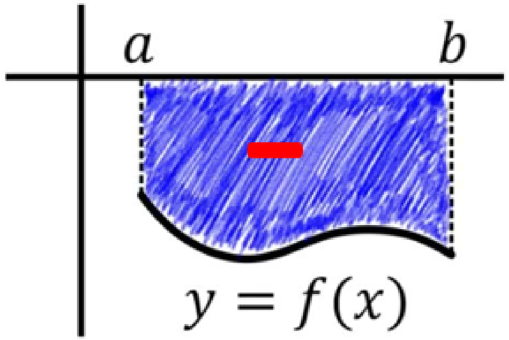
6.2. AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN

6. AZALERAK INTEGRALAREN BIDEZ

Integral mugatuak f(x) funtzioak eta 0X ardatzak [a,b] tartean mugatzen dauan azalera da.



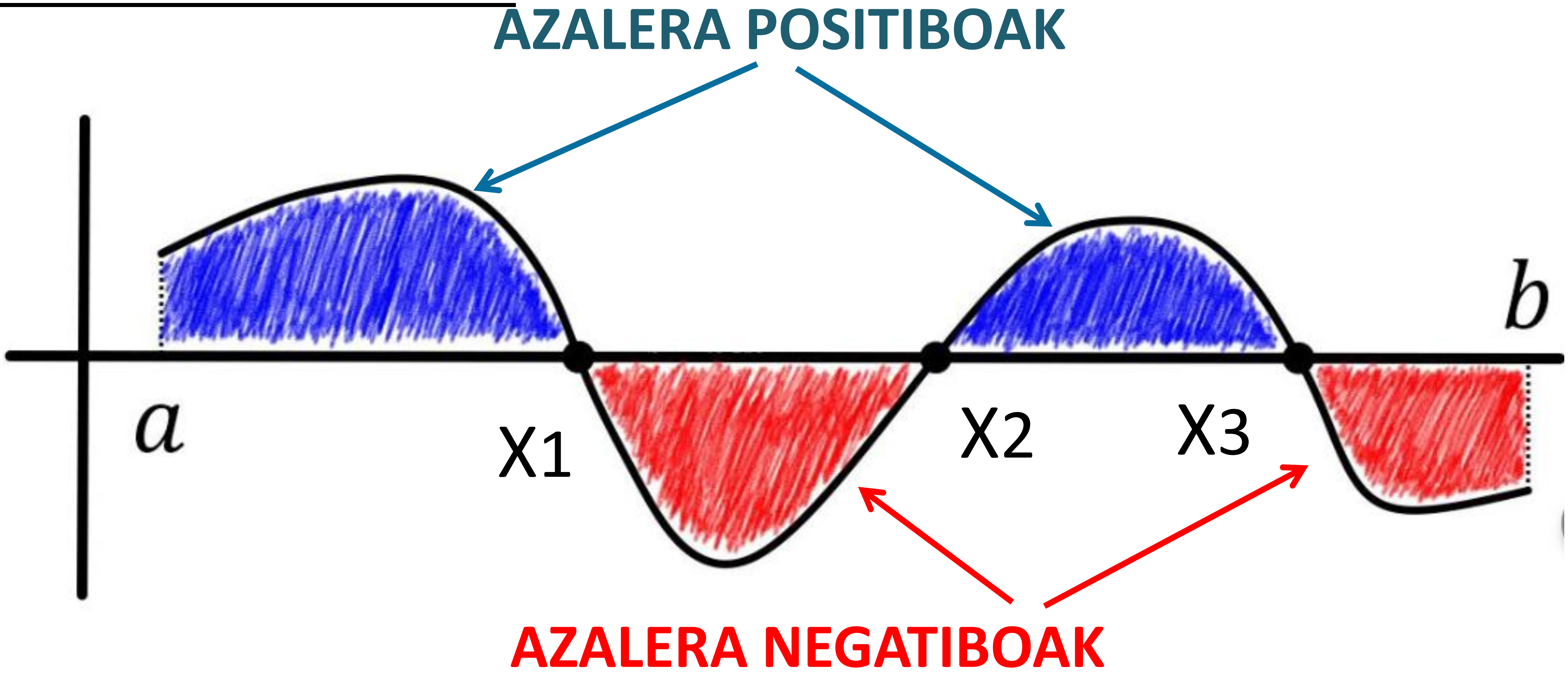
$$\int_a^b f(x)dx > 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = A$$



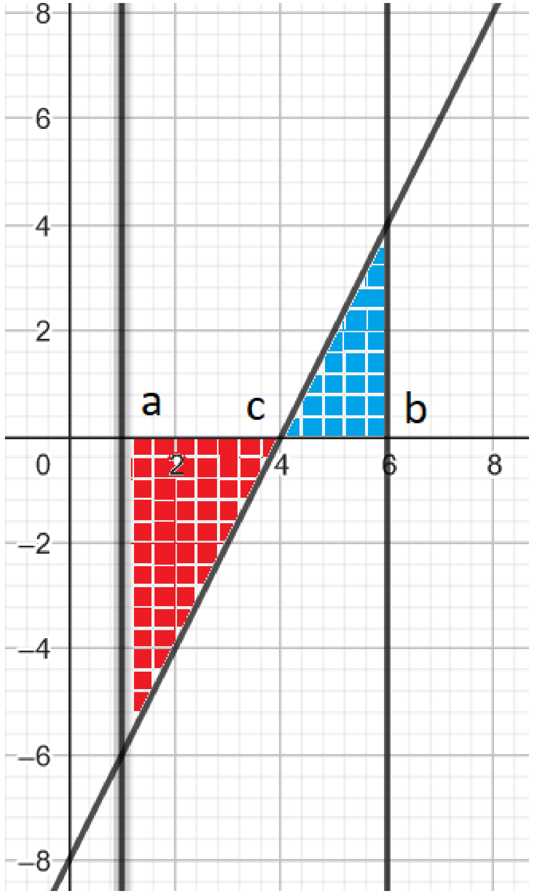
$$\int_a^b f(x)dx < 0 \qquad \left|\int_a^b f(x)dx\right| > 0$$

$$-\int_a^b f(x)dx = A$$

6.1. AZALERA : FUNTZIO BATEK ETA OX ARDATZAK MUGATUTAKO AZALERA



$$f(x) < 0 \; bada \; \forall x \in [a, c) \; eta \; f(x) > 0 \; bada \; \forall x \in [c, b] (edo \; alderantziz)$$



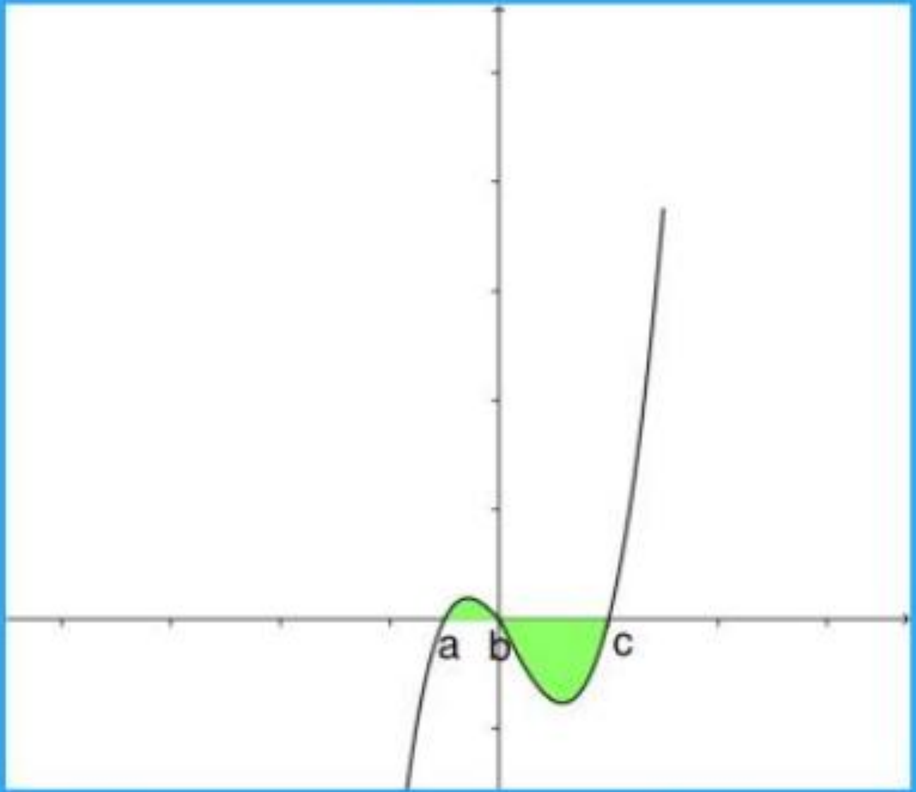
Funtzioak 0X ardatzarekin mugatzen dauan azalerari [a,b] tartean A deituko dogu eta honela kalkulatu daiteke:

$$A = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Edo:

$$A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

Honako adierazpen hauetatik zeinek ematen digu f-ren grafikoak eta abzisa ardatzak mugatzen duten azalera?

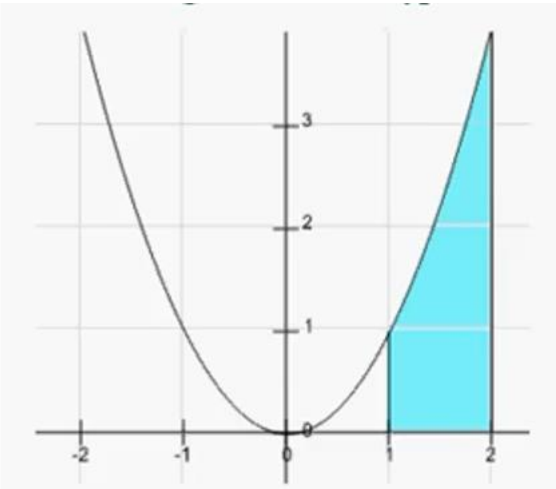


a. $\int_a^c f(x)$

b. $\left|\int_a^c f(x)\right|$

c. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

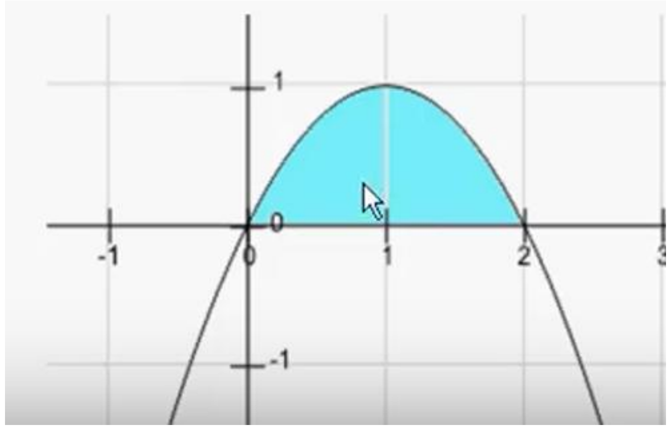
d. $\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$



ADIBIDEA: Kalkulatu y =x^2 , X ardatzak eta x=1 eta x= 2 zuzenek mugatutako azalera

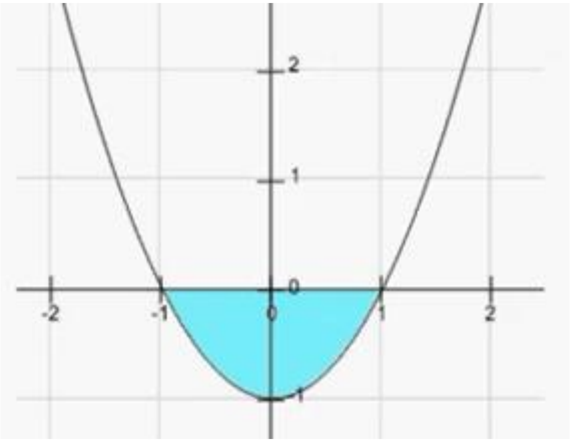
$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\, u^2$$

ADIBIDEA: Kalkulatu y = 2x-x^2 eta X ardatzak mugatutako azalera



$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$\left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{4}{3} u^2$$



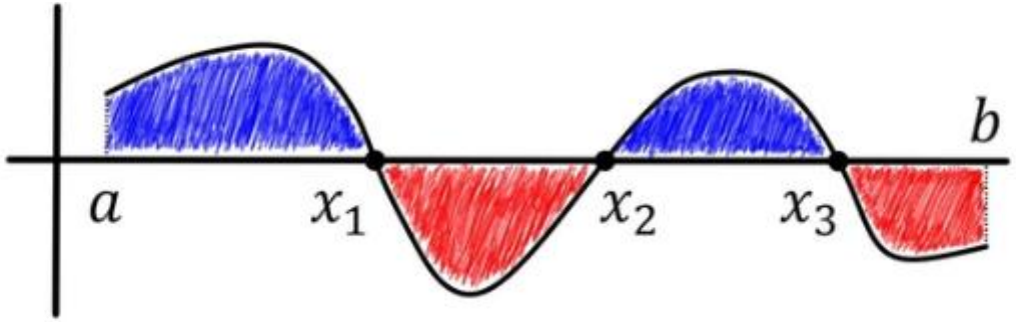
ADIBIDEA: Kalkulatu y = x^2 -1 eta X ardatzak mugatutako azalera

$$\left|\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| =$$

$$= \frac{4}{3}\,u^2$$

6.1. AZALERA OX ARDATZAREKIN



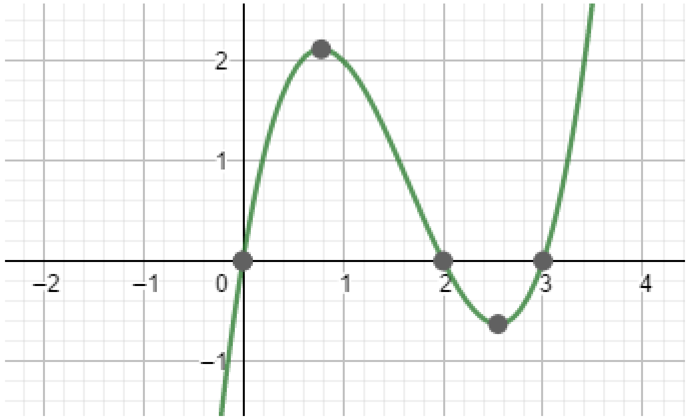
1) **EBAKI-PUNTUAK:** Ebatzi **f(x)=0** ekuazioa, kurbaren eta X ardatzaren arteko ebaki-puntuak lortzeko.
2) Esparruen azalerak OX ardatzaren gainetik edo azpitik dagozan aztertu ("+" edo "-"?)
3) Kalkulatu **f(x)ren jatorrizkoa F(x)**
4) Esparruen azalerak integral mugatuen balio absolutuak dira eta azalera guztia, esparruen azalera guztien batura da.
   Beste modu batean; OX gainazalaren gainetik dagozan esparruak batuketa bezala eta azpitik dagozanak kenketa bezala adierazi. **Barrowen erregela** aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

6.1 AZALERA OX ARDATZAREKIN

373)1 **1.ADIBIDEA**

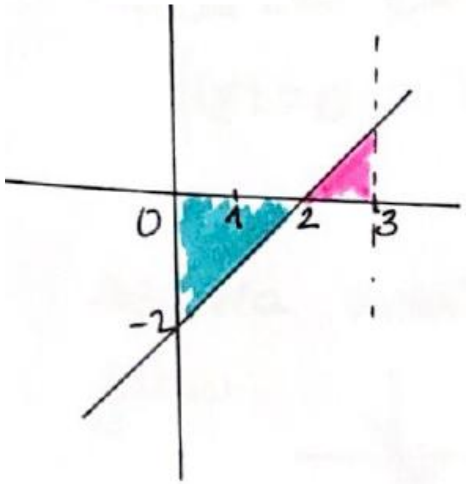
Kalkulatu $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ *kurbaren eta* X *ardatzaren artean dagoen azalera.*



1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

2.ADIBIDEA

f(x) = x-2 eta 0X ardatzak mugatutako azalera [0,3] tartean.



$$\int_0^2 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2 = \left(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right) - \cancel{\left(\frac{0^2}{2}-2\cdot 0\right)} =$$

$$= \boxed{-2}$$

NEGATIBOA da
0X ardatzaren azpian

$$\int_2^3 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 = \left(\frac{3^2}{2}-2\cdot 3\right) - \left(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

POSITIBOA da
0X ardatzaren gainean.

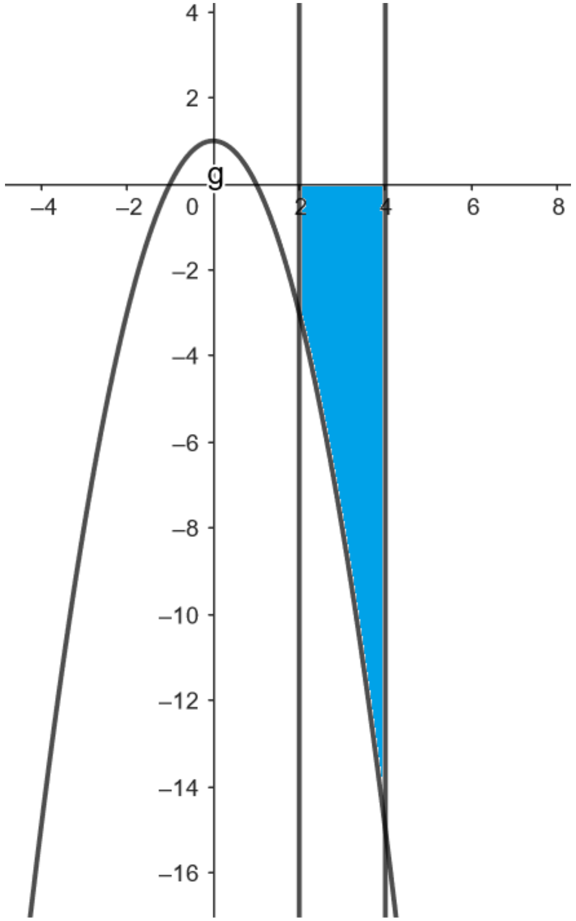
$$A = -\int_0^2 (x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx = -(-2) + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}u^2}$$

azalera hau 0X ardatzaren azpian dagoenez, ⊖ emoten dau.

1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

3.ADIBIDEA

$f(x) = 1-x^2$ kurba, 0X ardatzak eta x=2 eta x=4 zuzenek mugatutako azalera.



$$\int_2^4 (1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \left(4-\frac{64}{3}\right)-\left(2-\frac{8}{3}\right) = 2-\frac{56}{3} = -\frac{50}{3}.$$

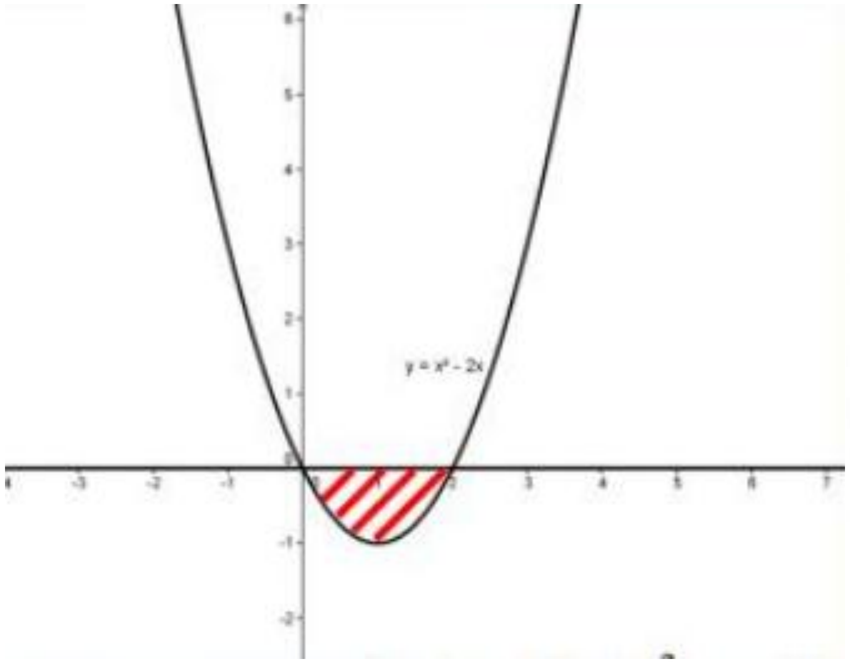
Azalera 0X ardatzaren azpian dagoanez $-$ emoten dau integrala berez horrela adierazi daiteke

$$A = -\int_2^4 (1-x^2)\,dx = \left|\int_2^4 (1-x^2)\,dx\right| = \left|-\frac{50}{3}\right| = \boxed{\frac{50}{3}u^2}$$

1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

4.ADIBIDEA

f(x) = x^2-2x kurbak eta 0X ardatzak mugatutako azalera [0,2] tartean.

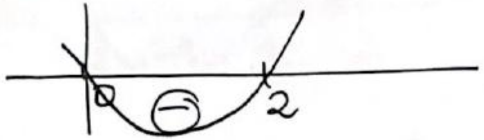


1.) Kurba eta OX ardatzaren ebaki-puntuak

$$f(x)=0 \qquad x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0 \quad < \quad x_1=0, \; x_2=2$$

2.) Azalera ardatzaren goikoldean edo behekoldean dagoen jakin:



$$f(1)=1^2-2\cdot 1=-1$$

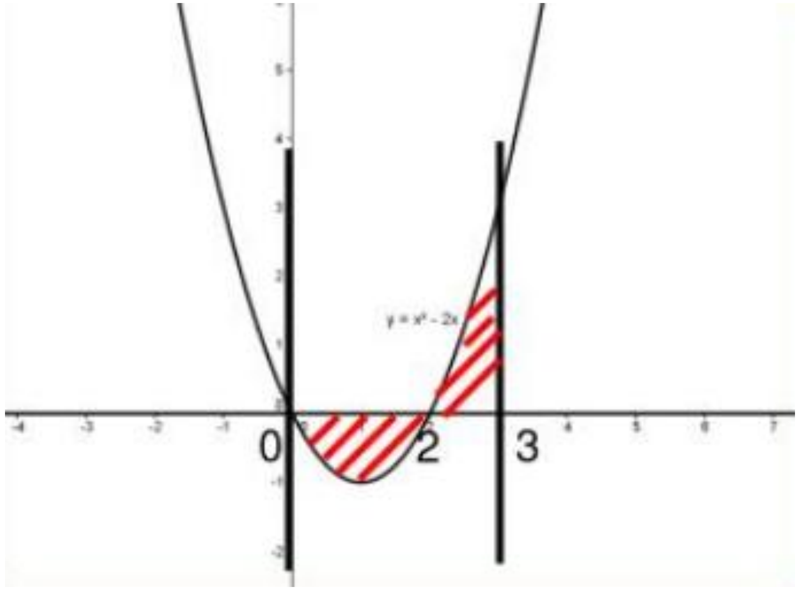
3.) Azalera kalkulatu

$$A=-\int_0^2 (x^2-2x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+0^2\right)=-\frac{8}{3}+4=\boxed{\frac{4}{3}\,u^2}$$

5.ADIBIDEA

$f(x) = x^2 - 2x$ kurbak, $x=0$ eta $x=3$ zuzenek, 0X ardatzarekin mugatzen daben eskualdearen azalera.



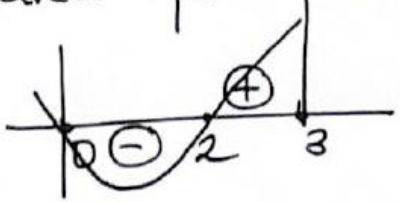
1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

5. ADIBIDEA

1.) Kurba eta 0X ardatzaren ebaki-puntuak

$$f(x)=0 \qquad x^2-2x=0 \qquad x(x-2)=0 \qquad x_1=0, \quad x_2=2$$

2.) Azalera ardatzaren goikoldean edo behekoldean dagoen jakin



$f(1) = -1$ −

$f(2{,}5) = 1{,}25$ +

3.) Azalera:

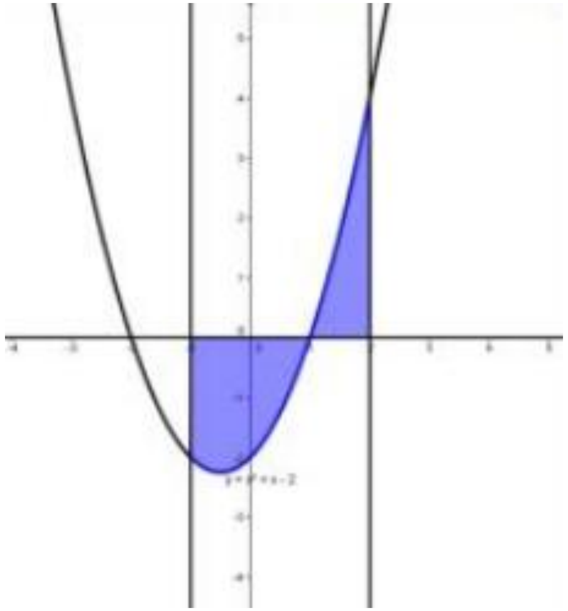
$$A = -\int_0^2 (x^2-2x)\,dx + \int_2^3 (x^2-2x)\,dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{2x^2}{2}}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = -\left[\left(\frac{8}{3}-4\right)-(0-0)\right] + \left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 - \frac{8}{3} + 4 = 8 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{8}{3}u^2}$$

6.ADIBIDEA

$f(x) = x^2 + x - 2$ kurbak eta 0X ardatzak mugatzen daben eskualdearen azalera x=-1 eta x= 2 absizen artean

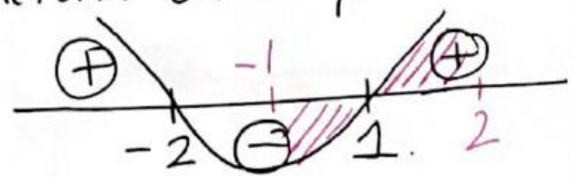


1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

1.) kurba eta OX ardatzaren ebaki puntuak

$f(x)=0 \qquad x^2+x-2=0 \quad < \quad x_1=-2, \; x_2=1$

2.) Azalerak OX-en goinetik edo azpitik?



3.) Azalera:

$$A = (-)\int_{-1}^{1}(x^2+x-2)\,dx + \int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx =$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2} =$$

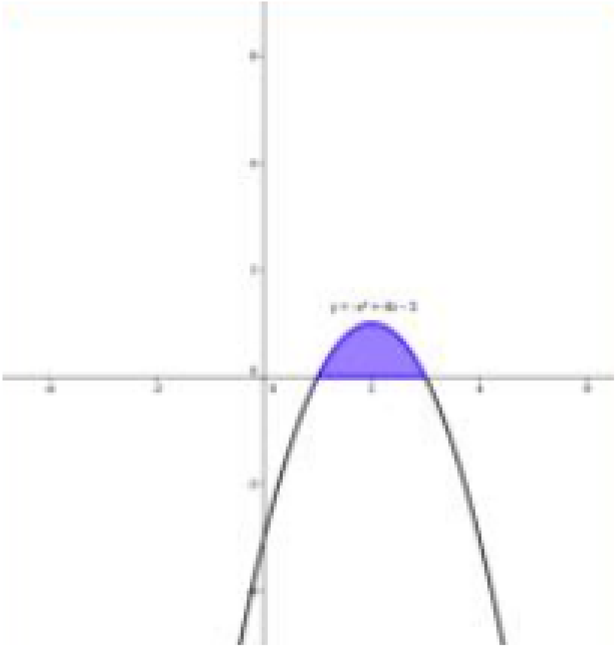
$$= -\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right)\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\right]$$

$$=\left(\cancel{-\frac{1}{3}}\cancel{-\frac{1}{2}}+2+\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{2}\right)+\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}-4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\cancel{2}\right) = \boxed{\frac{31}{6}\,u^2}$$

1. 0X ardatzarekiko ebaketa puntuak aurkitu.
2. 0X ardatzaren gainetik edo azpitik?
3. Jatorrizko funtzioa kalkulatu (Integral mugagabea)
4. Barrowen erregela aplikatu tartearen artean ebaketa puntuak kontuan hartuz.

7.ADIBIDEA

$f(x) = -x^2 + 4x – 3$ funtzioak eta 0X ardatzak mugatutzen duten eskualdearen azalera.



1.) $f(x)=0$ Kurba eta 0X ardatzaren ebaki puntuak.

$$-x^2+4x-3=0 \quad < \begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=3 \end{matrix}$$

2.) 0X-en gainetik edo azpitik?

3) Azalera.

$$A=\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3 =$$

$$=\left(-\frac{27}{3}+2\cdot 9-3\cdot 3\right)-\left(-\frac{1}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right)=$$

$$=-\frac{27}{3}+9+\frac{1}{3}+1=-\frac{26}{3}+10=\boxed{\frac{4}{3}u^2}$$

6 a) Kalkulatu: $\int_{-1}^{4}(x^2+x-2)\,dx$

b) Aurkitu $y = x^2+x-2$ kurbak X ardatzarekin -1 eta 4 abzisen artean zehazten duen azalera.

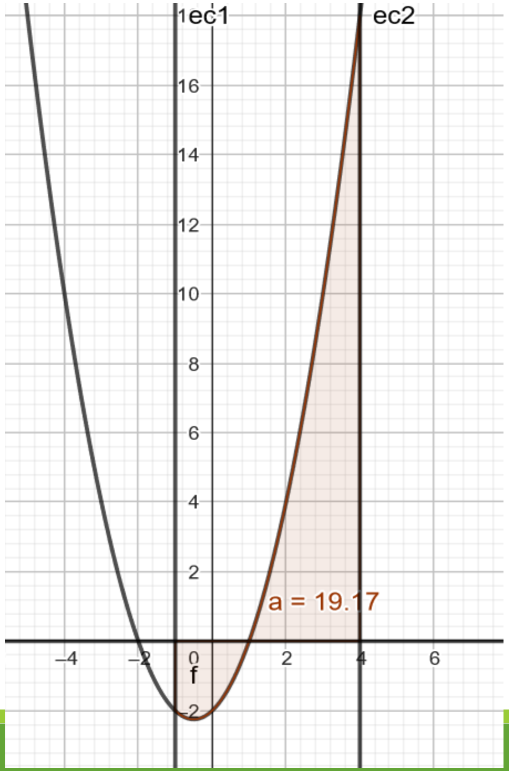
a) $\int_{-1}^{4}(x^2+x-2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{4} =$

$= \left(\frac{4^3}{3}+\frac{4^2}{2}-2\cdot 4\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right) =$

$= \left(\frac{64}{3}+8-8\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right) = \boxed{\frac{115}{6}}$

b) Parabolaren irudikapen grafikoa

Erpina $(-1/2, -9/4)$



1) OX ardatzarekin ebaketa puntuak: $\rightarrow y=0$

$\boxed{f(x)=0}$ $\quad 0 = x^2+x-2 \quad x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-2)}}{2} = \begin{cases}\boxed{x_1=-2}\\ \boxed{x_2=1}\end{cases}$

2) Bi esparru sortzen dira, lehenengoa azpitik $\ominus$ eta bigarrena goitik $\oplus$

Esparru honen azalera OX ardatzaren azpitik dagoenez $\ominus$ dago beraz BALIO ABSOLUTUA edo $\ominus$ aurrean

3) AZALERA

$$A = \left|\int_{-1}^{1}(x^2+x-2)\,dx\right| + \int_{1}^{4}(x^2+x-2)\,dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1}(x^2+x-2)\,dx + \int_{1}^{4}(x^2+x-2)\,dx =$$

6 a) Kalkulatu: $\int_{-1}^{4} (x^2 + x - 2)\, dx$

b) Aurkitu $y = x^2 + x - 2$ kurbak X ardatzarekin -1 eta 4 abzisen artean zehazten duen azalera.

2

$$= - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{4} =$$

$$= - \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \cdot 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1)\right)\right] + \left[\left(\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{3} - 2 \cdot 1\right)\right]$$

$$= - \left[-\frac{7}{6} - \frac{13}{6}\right] + \left[\frac{64}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{- \left[-\frac{20}{6}\right]} + \left(\frac{135}{6}\right) = \boxed{\frac{155}{6}\, u^2}$$

Azalera azpitik
dagoanez $-$ da, horregatik aurrean "$-$" ipintzen da
Beste modu batera itango zan BALIO ABSOLUTUAREKIN

7 Kalkulatu $y = 3x^2 - x + 1$ kurbaren, X ardatzaren eta $x = 0$ eta $x = 4$ zuzenen artean dagoen esparruaren azalera.

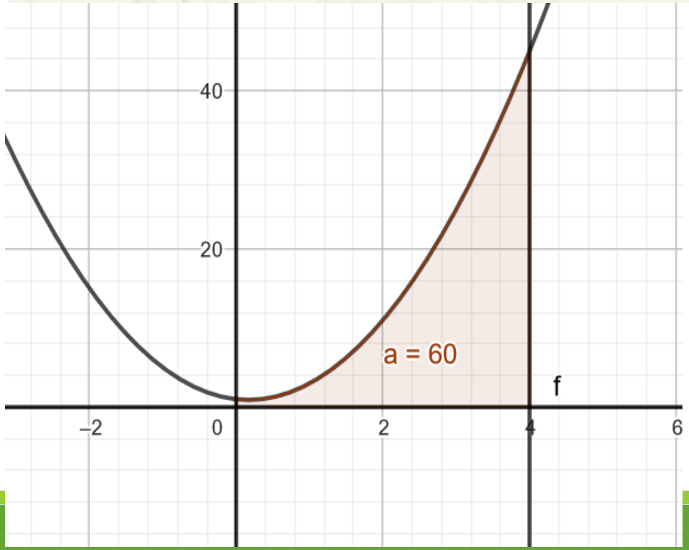
1.) Ebaketa puntuak OX ardatzagaz: $\boxed{f(x)=0}$

$y=0$

$0=3x^2-x+1$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$$

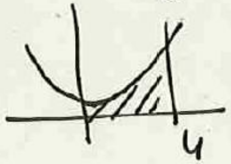
Ez dau OX ardatza ebakiten.



Irudikapen grafikoa

Erpina $x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{3}\to y=1$ $E\left(\frac{1}{3},1\right)$

Ahurra dauen $\longrightarrow$



2.) Kalkulatu behar dau azalera OX ardatzaren goinetik dago berez. +

3.) Azalera eta BARROW aplikatu

$$A=\int_0^4(3x^2-x+1)\,dx=\left[\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^4=4^3-\frac{4^2}{2}+4=\underline{\underline{60\ u^2}}$$

8 Kalkulatu $y = 3x - 2$ kurbaren azpian $x = -1$ eta $x = 1$ zuzenen artean dagoen azalera.

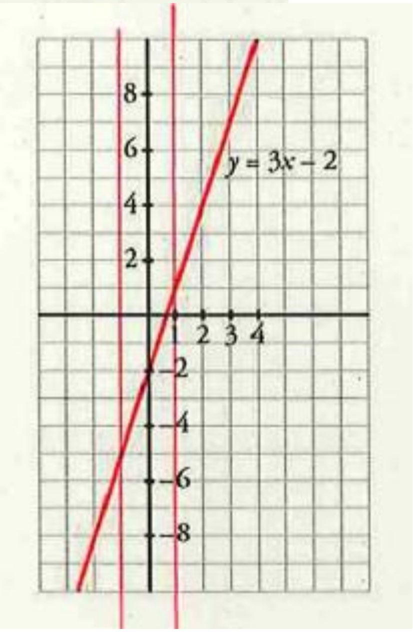
1.) Ebaketa puntuak $f(x)=0$

$3x-2=0$

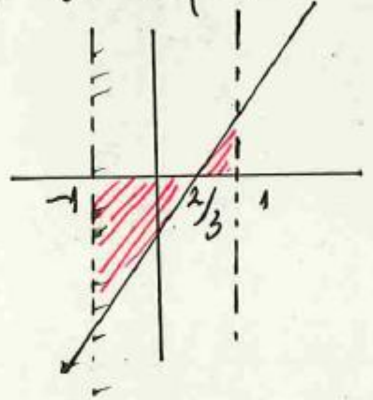
$x=2/3$.

* Zuzena irudikatzeko

x	y
0	−2
2	4
2/3	0



2) Bi esparru daude −1 eta 2/3-ren artekoa ⊖ eta 2/3 eta 1-ren artekoa ⊕



3) Azalera.

$$A = -\int_{-1}^{2/3}(3x-2)\,dx + \int_{2/3}^{1}(3x-2)\,dx =$$

$$= -\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2/3} + \left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{2/3}^{1} =$$

$$= -\left[\left(\frac{3(2/3)^2}{2} - 2\cdot\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3(-1)^2}{2} - 2(-1)\right)\right] + \left[\left(\frac{3\cdot 1^2}{2} - 2\cdot 1\right) - \left(\frac{3(2/3)^2}{2} - 2\cdot \frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{4}{6}-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}+2\right)\right] + \left[\left(\frac{3}{2}-2\right) - \left(\frac{4}{6}-\frac{4}{3}\right)\right] =$$

$$= -\left[\left(-\frac{2}{3}-\frac{7}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2} = \boxed{\frac{13}{3}\,u^2}$$

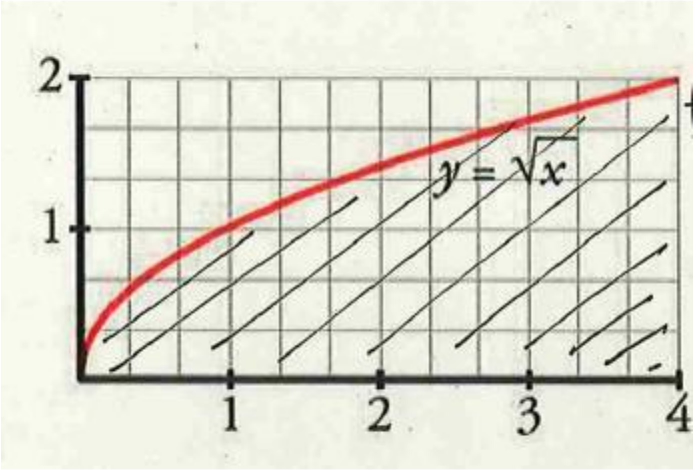
9 Aurkitu $y = \sqrt{x}$ kurbaren azpian $x = 0$ eta $x = 4$ artean dagoen azalera.

1.) Ebaketa puntuak ardatzekin

$f(x)=0 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \quad \boxed{x=0}$

Emandako funtzioa irudikatzeko puntu batzuk hartzen dira

x	0	1	4	
y	0	1	2	...



2.) Mugatutako esparrua OX ardatzaren goitik dagoenez ⊕ da integrala.

3.) Azalera

$$A = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \int_0^4 x^{1/2}\, dx = \left.\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}\right]_0^4 =$$

$$= \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \left.\frac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^4 \underset{\uparrow \text{BARROW}}{=} G(4) - G(0).$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}\right) = \boxed{\frac{16}{3}\, u^2}$$

10 Kalkulatu $y = (x-1)^2\,(x+1)$ kurbak eta $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ zuzenek zehazten duten esparruaren azalera.

3.) Esparrua bakarra dago eta OX ardatzaren goietik → (+)

$$A = \int_1^2 (x-1)^2(x+1)\,dx = \int_1^2 (x^3 - x^2 - x + 1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 4 - \frac{8}{3} - \cancel{2} + \cancel{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = 3 - \frac{7}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{11}{12}\,u^2}$$

1.) EBAKETA PUNTUAK OX ARDATZEKIN

$f(x) = 0$

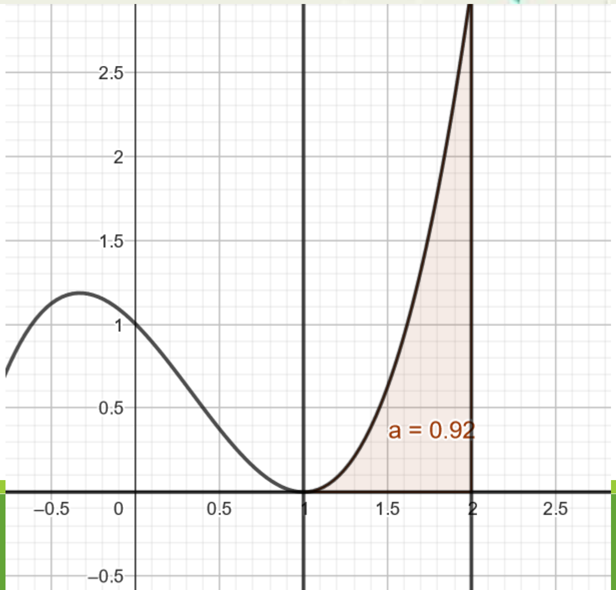
$0 = (x-1)^2(x+1)$

$x_1 = 1$ Bikoitza (ukitze puntua).

$x_2 = -1$

2.) Goikoa goitik edo azpitik?

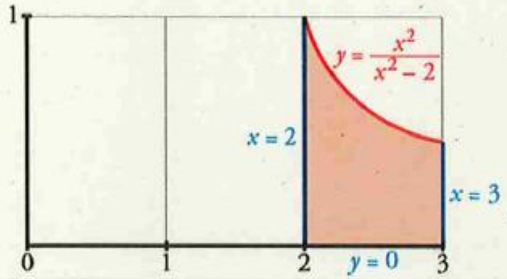
f(x)	−		+		+	2
	AZPITIK	−1	GAINETIK	1	GAINETIK	



11 Kalkulatu honako kurba honek:

$$y = \frac{x}{x^2 - 2}$$

eta $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$ zuzenek zehazturiko esparruaren azalera.



1.) Ebaketa puntuak ardatzekin

$f(x) = 0$

$0 = \dfrac{x}{x^2-2} \longrightarrow x = 0$

2) $x=0$ kalkulatu behar dan tartearen kanpoaldean dago. Beraz ateratzen dogu zein moduko ikurra izango dauen kurba tarte horretan.

Funtzioaren definizio eremua $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

beraz jarraia da $[2, 3]$ tartean.

$+$ (2 GAINETIK 3) $\qquad f(2,5) = +$

kurba goitik dago, beraz $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx > 0.$

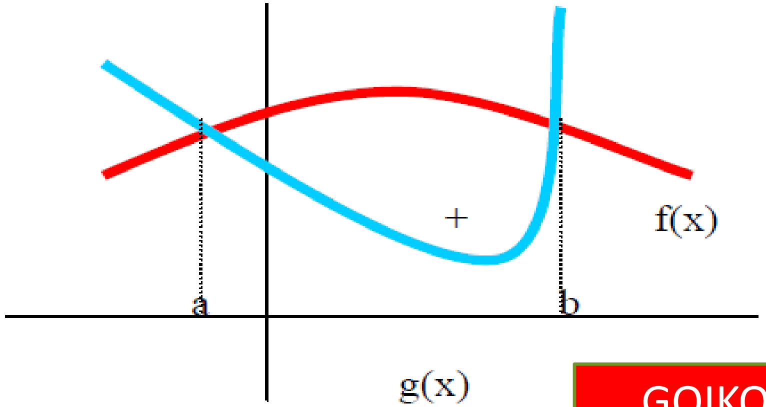
3.) Azalera

$$A = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-2|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left[\ln|x^2-2|\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 2) = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{7}{2}\ u^2}$$

6.2 AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN (esparru bat)

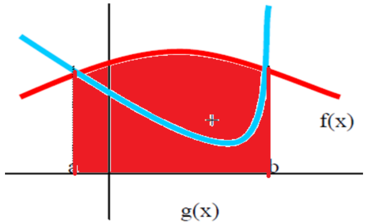
https://www.geogebra.org/m/MQWTjB4u

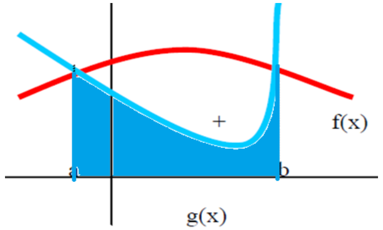


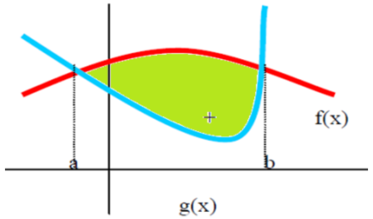
1. Kurben arteko **ebaketa puntuak** aurkitu (a eta b puntuak).f(x)=g(x)
2. **Kenketa-funtzioa** planteatu eta bere jatorrizkoa kalkulatu (Integral mugagabea).*(Goiko funtzioa ken beheko funtzioa)*
3. **Azaleraren kalkulua** egin a eta b tarterako **(Barrowen erregela).**

GOIKO KURBA – BEHEKO KURBA

$$Azalera = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

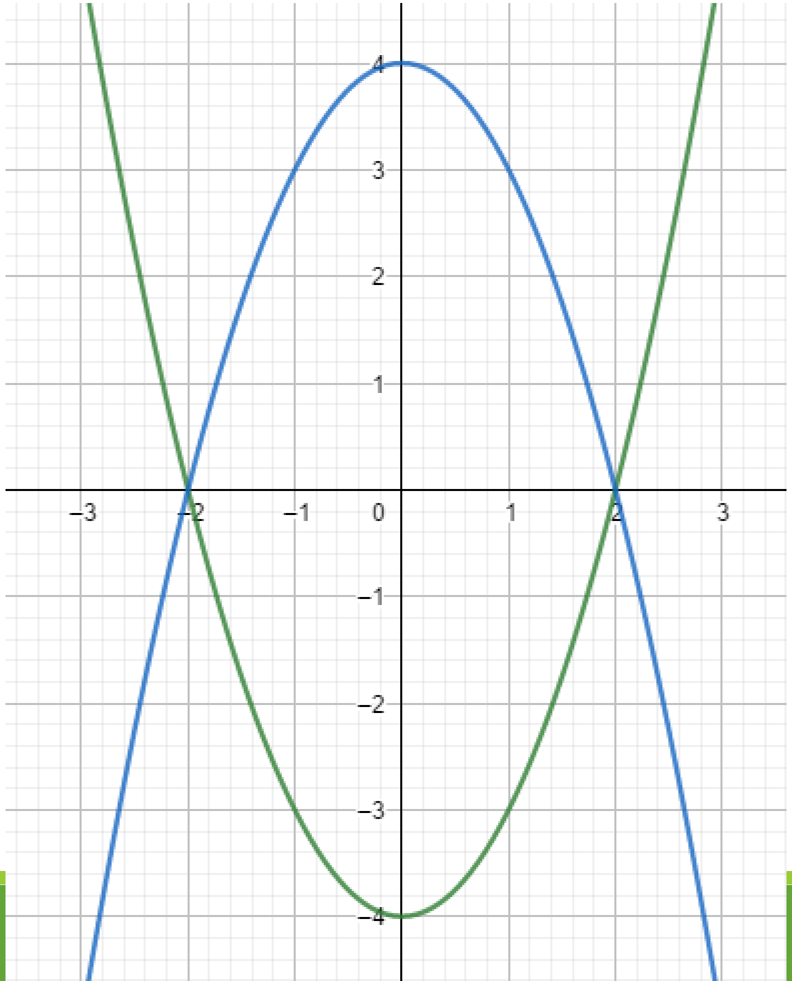






8.adibidea

$f(x)=x^2-4$ eta $g(x)=-x^2+4$



$f(x)=x^2-4$ | Erpina $x=\frac{-b}{2a}=0$ $E(0,-4)$

x ardat. ebak. puntuak $0=x^2-4$ $x=\pm 2$

$(2,0), (-2,0)$

$g(x)=-x^2+4$ | Erpina $x=\frac{-b}{2a}=0$ $E(0,4)$

x ard. ebaki puntuak $0=-x^2+4$ $x=\pm 2$

$(2,0), (-2,0)$

1.) f(x) eta g(x) ren ebaki puntuak

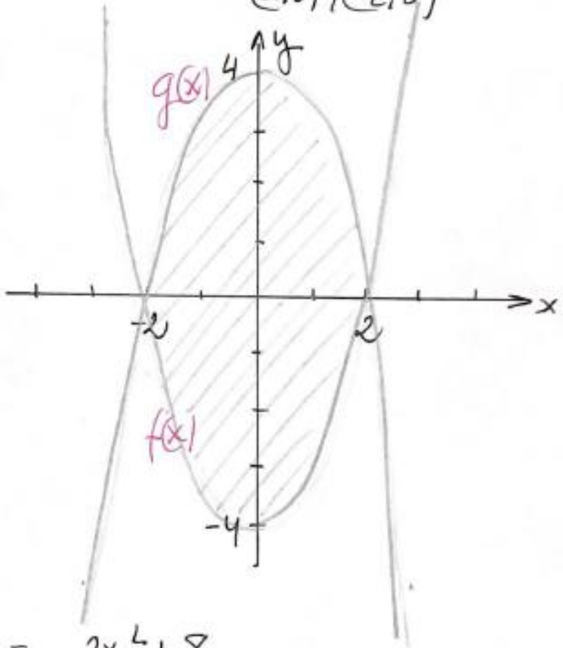
$f(x)=g(x)$

$x^2-4=-x^2+4$

$2x^2=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$ $\boxed{x_1=2 \quad y_1=0 \qquad x_2=-2 \quad y_2=0}$



2) Kenketa funtzioa

goiko funtzioa - beheko funtzioa

$g(x)-f(x)=(-x^2+4)-(x^2-4)=-2x^2+8$

3) Azalera - Barrow

BARROW

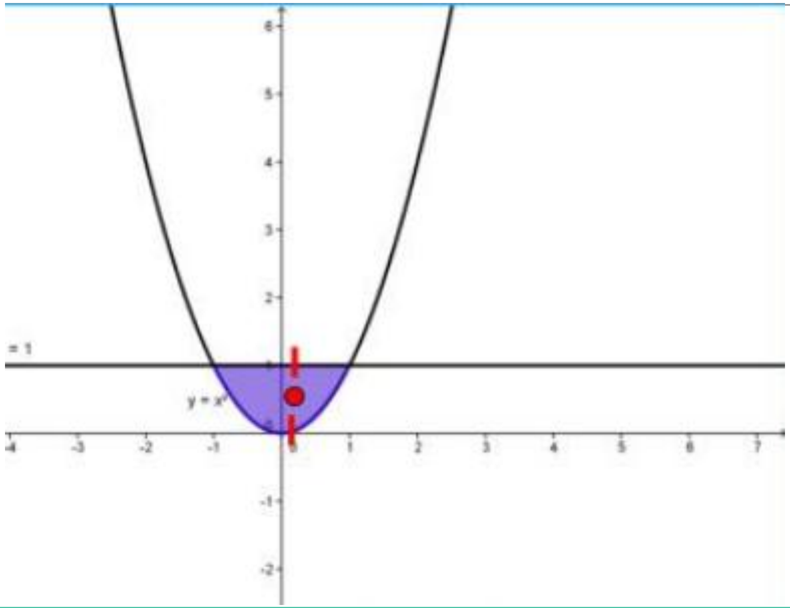
$$A=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)\,dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+8x\right]_{-2}^{2}=\left(-\frac{2\cdot 2^3}{3}+8\cdot 2\right)-\left(-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}+8(-2)\right)$$

$$=-\frac{16}{3}+16-\left(\frac{16}{3}-16\right)=-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}+16=\frac{64}{3}$$

kontuz!!

9. ADIBIDEA

Kalkulatu $y=x^2$ eta $y=1$ funtzioek mugatzen daben eskualdearen azalera



1. Kurben arteko **ebaketa puntuak** aurkitu (a eta b puntuak).f(x)=g(x)
2. **Kenketa-funtzioa** planteatu eta bere jatorrizkoa kalkulatu (Integral mugagabea).*<u>(Goiko funtzioa ken beheko funtzioa)</u>*
3. **Azaleraren kalkulua** egin a eta b tarterako **(Barrowen erregela).**

1) Ebaki-puntuak $x^2=1$ $x=\pm 1 \begin{cases}(1,1)\\(-1,1)\end{cases}$

2.) Kenketa funtzioa

Goikoa − behekoa

$H(x)=1-x^2$

Esparrua funtzio biak bat datozen baliek mugatuko dabe

3.) Azalera - Barrow.

Azalera kalkulatzeko kontutan izan behar da zein funtzioak mugatzen dauan eremua goitik eta zeinek behetik.

Kasu honetan $g(x)=1$ Goitik, eta $f(x)=x^2$ behetik bestela azalera negatiboa izango litzateke.

$$A=\int_{-1}^{1} g(x)-f(x) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{4}{3}u^2}$$

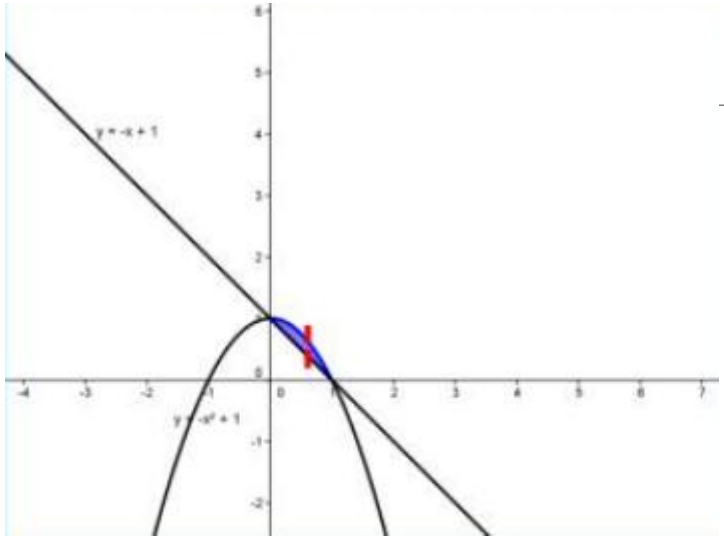
Et bada kontutan izaten goikoa eta behekoa zein dan, balio absolutuaz izan behar da.

$$A=\left|\int_{-1}^{1} f(x)-g(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx\right|$$

Barrowen erregelagaz $A=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

10. ADIBIDEA

Kalkulatu $y = 1 - x^2$ eta $y = 1 - x$ funtzioek mugatzen daben eskualdearen azalera



$f(x) = 1 - x^2$ Erpina $x = \frac{-b}{2a} = 0$ $E(0,1)$

$g(x) = 1 - x$ zuzena

x	0	1
y	1	0

1.) Ebaki puntuak

$f(x) = g(x)$ $\quad \cancel{1} - x^2 = \cancel{1} - x$

$x^2 - x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & (0,1) \\ x = 1 & (1,0) \end{cases}$

2.) Kenketa funtzioa goikoa - behekoa

$(1 - x^2) - (1 - x) = \cancel{1} - x^2 - \cancel{1} + x = -x^2 + x$

3.) Azalera

$$A = \int_0^1 (1 - x^2) - (1 - x)\, dx = \int_0^1 -x^2 + x =$$

Barrowen erregela aplikatu

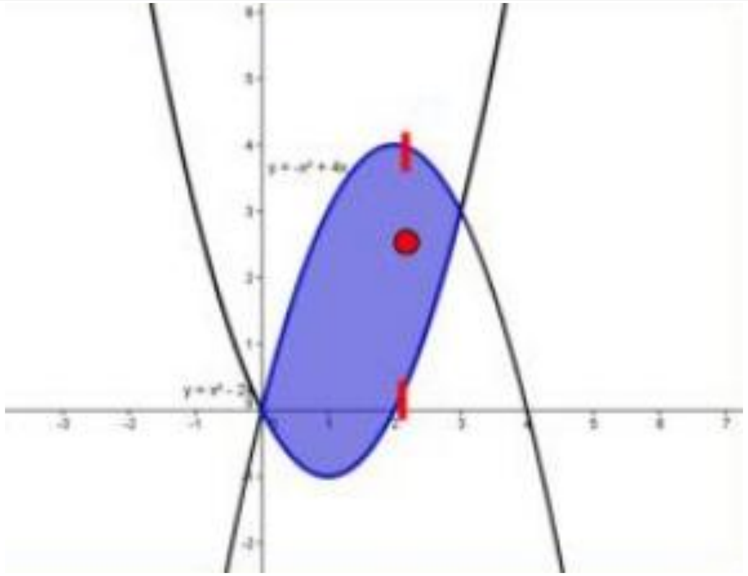
$$A = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} \right) - \cancel{\left(-\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right)} = \boxed{\frac{1}{6} u^2}$$

1. Kurben arteko **ebaketa puntuak** aurkitu (a eta b puntuak).$f(x)=g(x)$
2. **Kenketa-funtzioa** planteatu eta bere jatorrizkoa kalkulatu (Integral mugagabea).*<u>(Goiko funtzioa ken beheko funtzioa)</u>*
3. **Azaleraren kalkulua** egin a eta b tarterako **(Barrowen erregela).**

11. ADIBIDEA

Kalkulatu $y=x^2-2x$ eta $y=-x^2+4x$ funtzioek mugatzen daben eskualdearen azalera



1. Kurben arteko **ebaketa puntuak** aurkitu (a eta b puntuak).f(x)=g(x)
2. **Kenketa-funtzioa** planteatu eta bere jatorrizkoa kalkulatu (Integral mugagabea).*<u>(Goiko funtzioa ken beheko funtzioa)</u>*
3. **Azaleraren kalkulua** egin a eta b tarterako **(Barrowen erregela).**

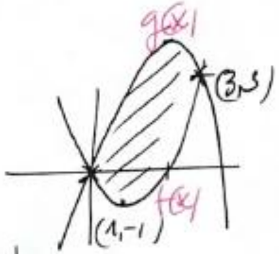
1. Ebaketa puntuak

$$f(x)=g(x) \quad x^2-2x=-x^2+4x \nearrow \begin{array}{l} 2x^2-6x=0 \\ 2x(x-3)=0 \end{array} \Big\langle \boxed{\begin{array}{ll} x_1=0 & (0,0) \\ x_2=3 & (3,3) \end{array}}$$

2. Kurben irudikapena egiteko:

$f(x)=x^2-2x$ | Erpina $x=\frac{2}{2}=1$ $E(1,-1)$

$\cup$ | x ard. ebaketa punt: $0=x^2-2x \Big\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2 \end{array}$



$g(x)=-x^2+4x$ | Erpin $x=\frac{-4}{2(-1)}=2$ $E(2,4)$

$\cap$ | x ardatzarekin ebaketa punt: $0=-x^2+4x \Big\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=4 \end{array}$

2. Kenketa puntuak

$$g(x)-f(x)=(-x^2+4x)-(x^2-2x)=-2x^2+6x$$

3. Azalera: Barrowen erregela

$$A=\int_0^3 (g(x)-f(x))\,dx=\int_0^3 (-x^2+4x)-(x^2-2x)\,dx=$$

$$=\int_0^3 (-2x^2+6x)\,dx \overset{\text{BARROW}}{=} \left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left(-\frac{2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3^2\right)-\cancel{\left(-\frac{2\cdot 0^3}{3}+\frac{6\cdot 0^2}{2}\right)}^{0}=\boxed{9u^2}$$

14 Aurkitu, kasu hauetako bakoitzean, ematen diren parabola-bikoteen artean dagoen azalera:

a) $y = x^2 - 5$ eta $y = -x^2 + 5$

1) Ebakidura-puntuak $\quad f(x) = g(x)$

$x^2 - 5 = -x^2 + 5$

$2x^2 = 10$

$x^2 = 5 \longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Irudikapena (*) $f(x) = x^2 - 5$

Erpina $x = \frac{-b}{2a} = 0 \quad y = -5 \quad (0,-5)$

x ardatzarekin ebaketa puntuak

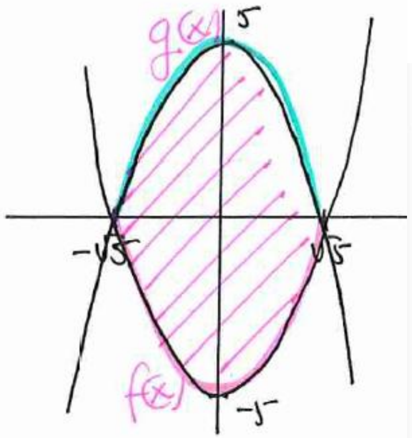
$0 = x^2 - 5 \quad x = \pm\sqrt{5}$

(*)(*) $g(x) = -x^2 + 5$

Erpina $x = 0 \quad y = 5 \quad (0,5)$

x ardatzarekin ebaketa puntuak

$0 = -x^2 + 5 \longrightarrow x = \pm\sqrt{5}$



2) Kenketa-funtzioa

$g(x) - f(x) = (-x^2+5) - (x^2-5) = -2x^2 + 10.$

goikoa behekoa

3) Azalera

BARROW

$$A = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-x^2+5) - (x^2-5)\, dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-2x^2+10)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 10x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \left(-\frac{2\sqrt{5}^3}{3} + 10\sqrt{5}\right) - \left(-\frac{2(-\sqrt{5})^3}{3} + 10(-\sqrt{5})\right)$$

$$= \left(-\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{30\sqrt{5}}{3}\right) - \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{30\sqrt{5}}{3}\right) =$$

$$= \frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{20\sqrt{5}}{3} = \boxed{\frac{40\sqrt{5}}{3}\, u^2}$$

14 Aurkitu, kasu hauetako bakoitzean, ematen diren parabola-bikoteen artean dagoen azalera:

b) $y = x^2$ e $y^2 = x$

1.) EBAKIDURA PUNTUAK

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x} \rightarrow x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

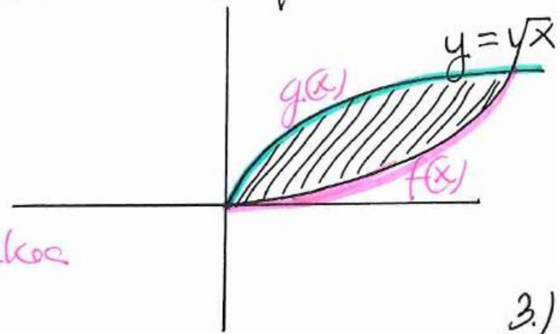
$(0,0) \quad (1,1)$

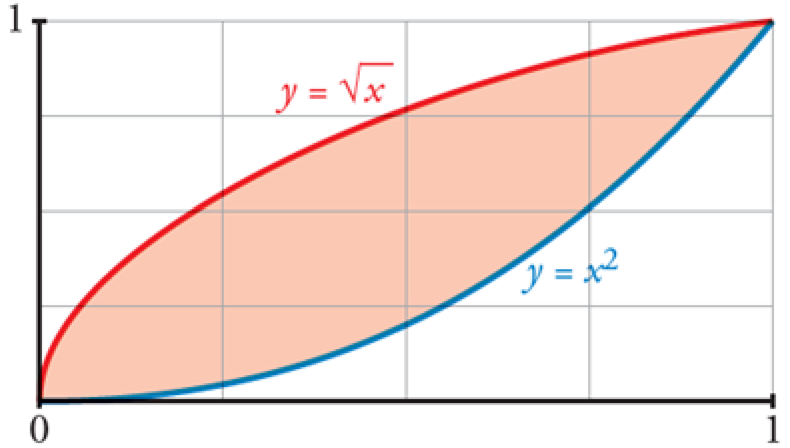
Irudikapena

$f(x) = x^2$ E $(0,0)$ Ebak puntua ardatzekin $(0,0)$

$g(x) = \sqrt{x}$ Erroduna funtzioa

Dom $f = [0, +\infty)$





2.) Kenketa funtzioa goikoa − behekoa

$g(x) - f(x) = \sqrt{x} - x^2$

3.) Azalera

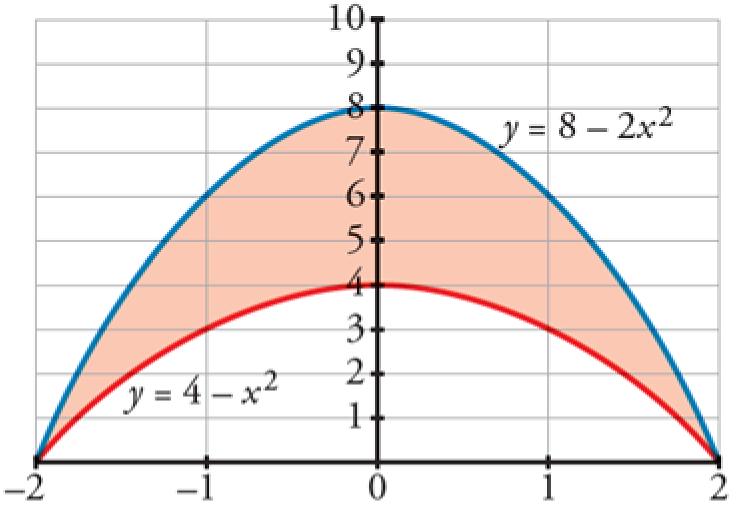
$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - \frac{1}{3}\right) - \cancel{\left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} - \frac{0^3}{3}\right)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \cancel{\frac{9}{6}}\ \boxed{\frac{1}{3}u^2}$$

15 Kalkulatu honako kasu hauetako bakoitzean emandako kurben artean mugaturiko azalera:

a) $y = 4 - x^2$ $\qquad$ $y = 8 - 2x^2$



1) Ebakidura puntuak

$f(x) = g(x)$ $\qquad x^2 - 4 = 0$ $\qquad x_1 = 2 \quad y_1 = 0$

$4 - x^2 = 8 - 2x^2$ $\qquad x = \pm 2$ $\qquad x_2 = -2 \quad y_2 = 0.$

Irudikapena

$\cap$ $y = 4 - x^2$ $\quad E(0,4)$ $\quad$ OX ardatzarekin $\quad 0 = 4 - x^2 \rightarrow x = \pm 2$

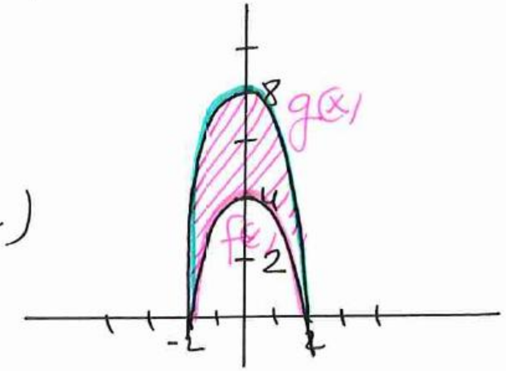
$\cap$ $y = 8 - 2x^2$ $\quad E(0,8)$ $\quad$ OX ardatzarekin $\quad 0 = 8 - 2x^2 \rightarrow x = \pm 2$

2) Kenketa funtzioa.

Goiko kurba − Beheko kurba

$g(x) - f(x) = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) =$

$= 4 - x^2$



3) Azalera - Barrow.

$$A = \int_{-2}^{2} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2) - (4 - x^2)\,dx$$

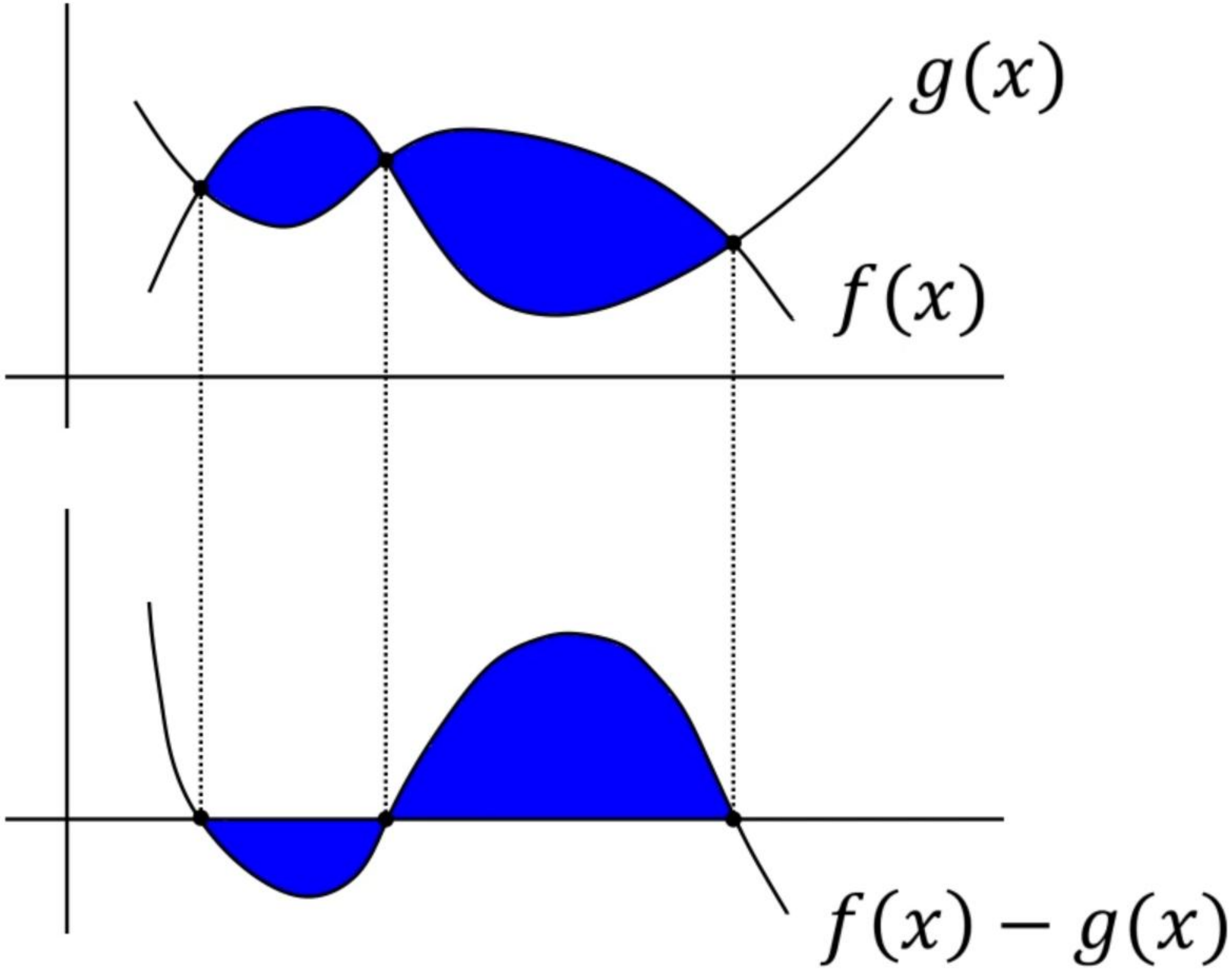
$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = 16 - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}\,u^2}$$

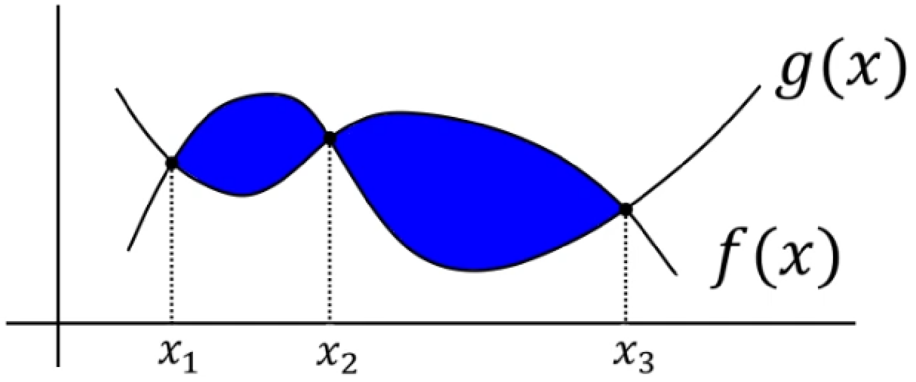
https://www.geogebra.org/m/MQWTjB4u

6.2 AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN(bi esparru)



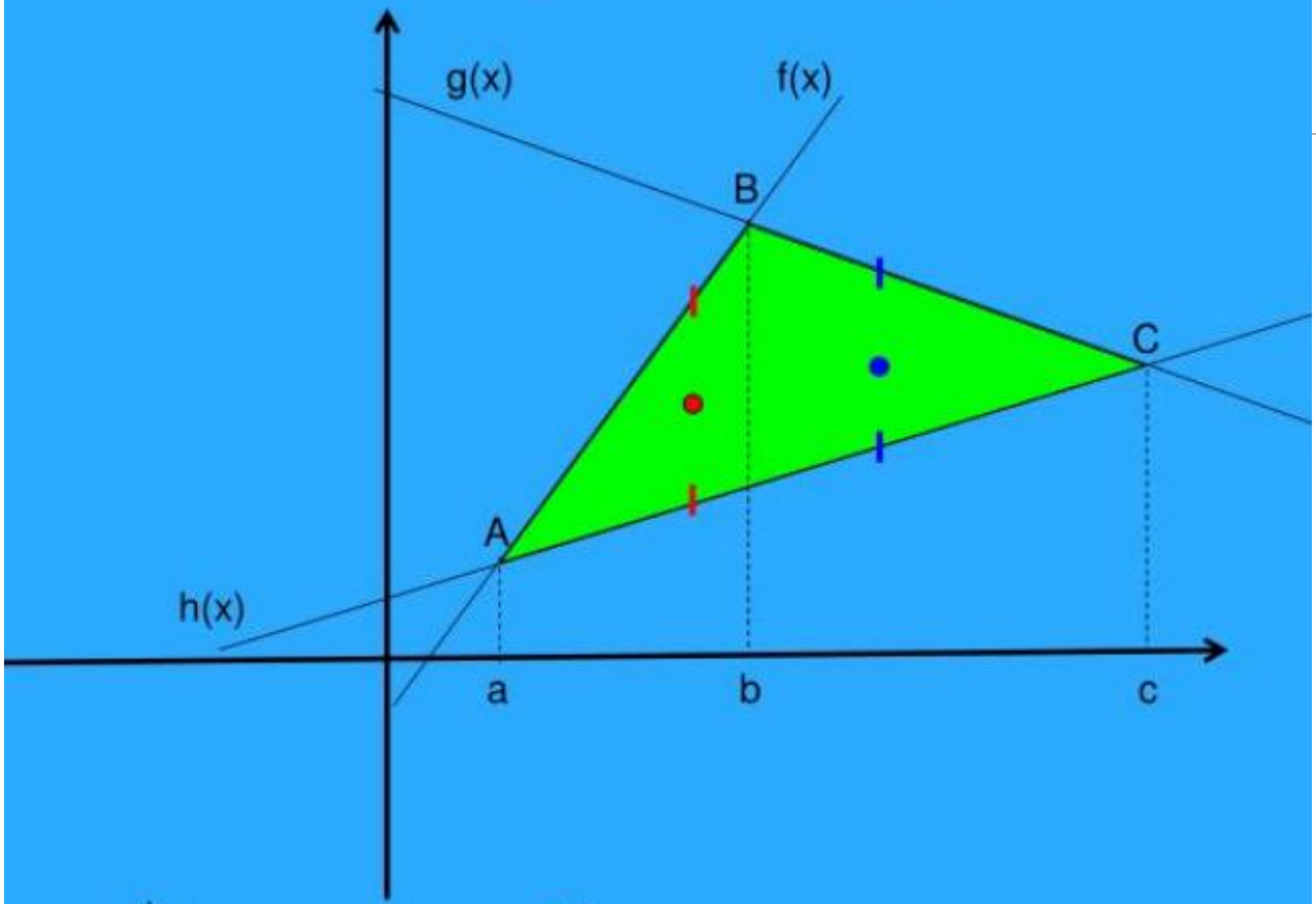
F eta g kurben artean dagoen azalera f-g kendura-funtzioaren eta X ardatzaren artean dagoan azaleraren bardina da.

6.2 AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN

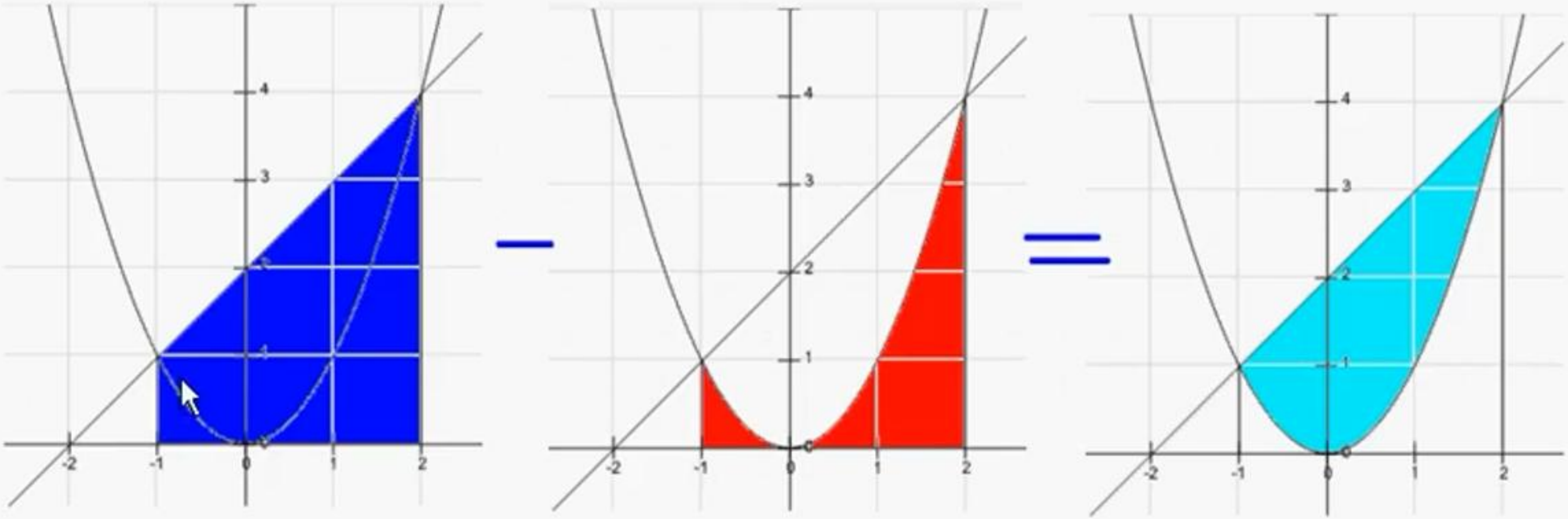


1. Ebatzi **f(x)=g(x)** , kurben arteko **ebaketa puntuak** aurkitzeko
2. <u>Esparru bakoitzeko</u> **kenketa-funtzioa** planteatu eta bere jatorrizkoa kalkulatu . <u>*Goiko funtzioa ken beheko funtzioa*</u> (edo balio absolutuak)
3. **Azaleraren kalkulua** egin.**(Barrowen erregela).**

- **Hiru funtziok mugatzen duten azalera.**



$$A = \int_a^b \left(f(x) - h(x)\right)dx + \int_b^c \left(g(x) - h(x)\right)$$



$$\int_{-1}^{2}(x+2)\,dx-\int_{-1}^{2}x^2\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left[\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\right]=\frac{9}{2}u^2$$

12. ADIBIDEA

Kalkulatu $y=x^2-1$, $y = 5-x$ funtzioek eta 0X ardatzak mugatzen daben eskualdearen azalera, x=1 eta x=5 tartean.

1./ EBAKI PUNTUAK

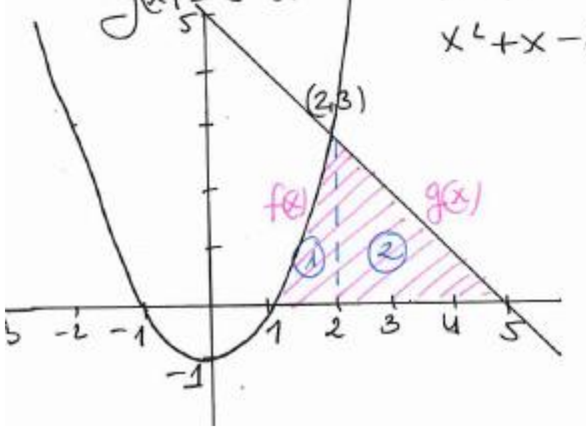
$f(x)=x^2-1 \longrightarrow f(x)=g(x)$

$g(x)=5-x \qquad x^2-1=5-x$

$x^2+x-6=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-3 \end{array}}$



$f(x)=x^2-1$

parabola $E(0,-1)$

OX ardatzapat $(1,0)$ $(-1,0)$

x	2	-3
y	3	8

2/ Kurkoto funtzioak

① esparruan $f(x)-0$.

② esparruan $g(x)-0$.

3/ Azalera

$$A=\int_1^2 (f(x)-0)\,dx+\int_2^5 (g(x)-0)\,dx=$$

$$=\int_1^2 (x^2-1)\,dx+\int_2^5 (5-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_2^5=$$

$$=\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)+\left(25-\frac{25}{2}\right)-\left(10-\frac{4}{2}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-\cancel{2}-\frac{1}{3}+1+25-\frac{25}{2}-10+\cancel{2}=16+\frac{7}{3}-\frac{25}{2}=\boxed{\frac{35}{6}u^2}$$

13. ADIBIDEA

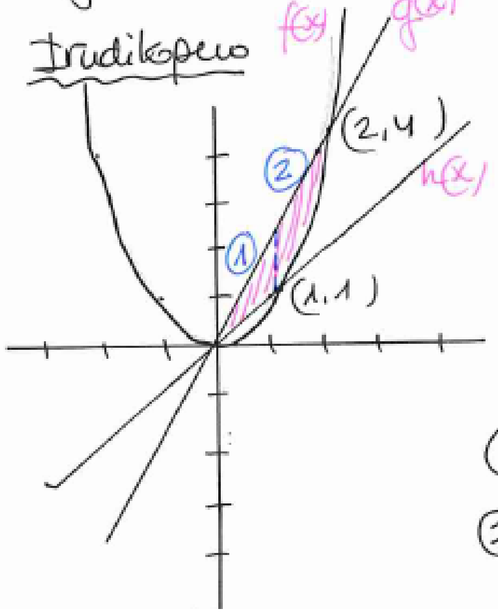
Kalkulatu $y=x^2$, $y = x$ eta $y=2x$ funtzioek mugatzen daben eskualdearen azalera

$y=x^2 \leftarrow f(x)=x^2$

$y=2x \leftarrow g(x)=2x$

$y=x \leftarrow h(x)=x$

Irudikapena



1. EBAKI PUNTUAK

f(x) g(x)

$x^2=2x$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$\boxed{\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=2 \end{matrix}}$ (0,0) (2,4)

f(x) eta h(x)

$x^2=x$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$\boxed{\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=1 \end{matrix}}$ (0,0) (1,1)

2) kenketa funtziok bi esparruetan

1 $g(x)-h(x)=2x-x=x$

2 $g(x)-f(x)=2x-(x^2)=2x-x^2$

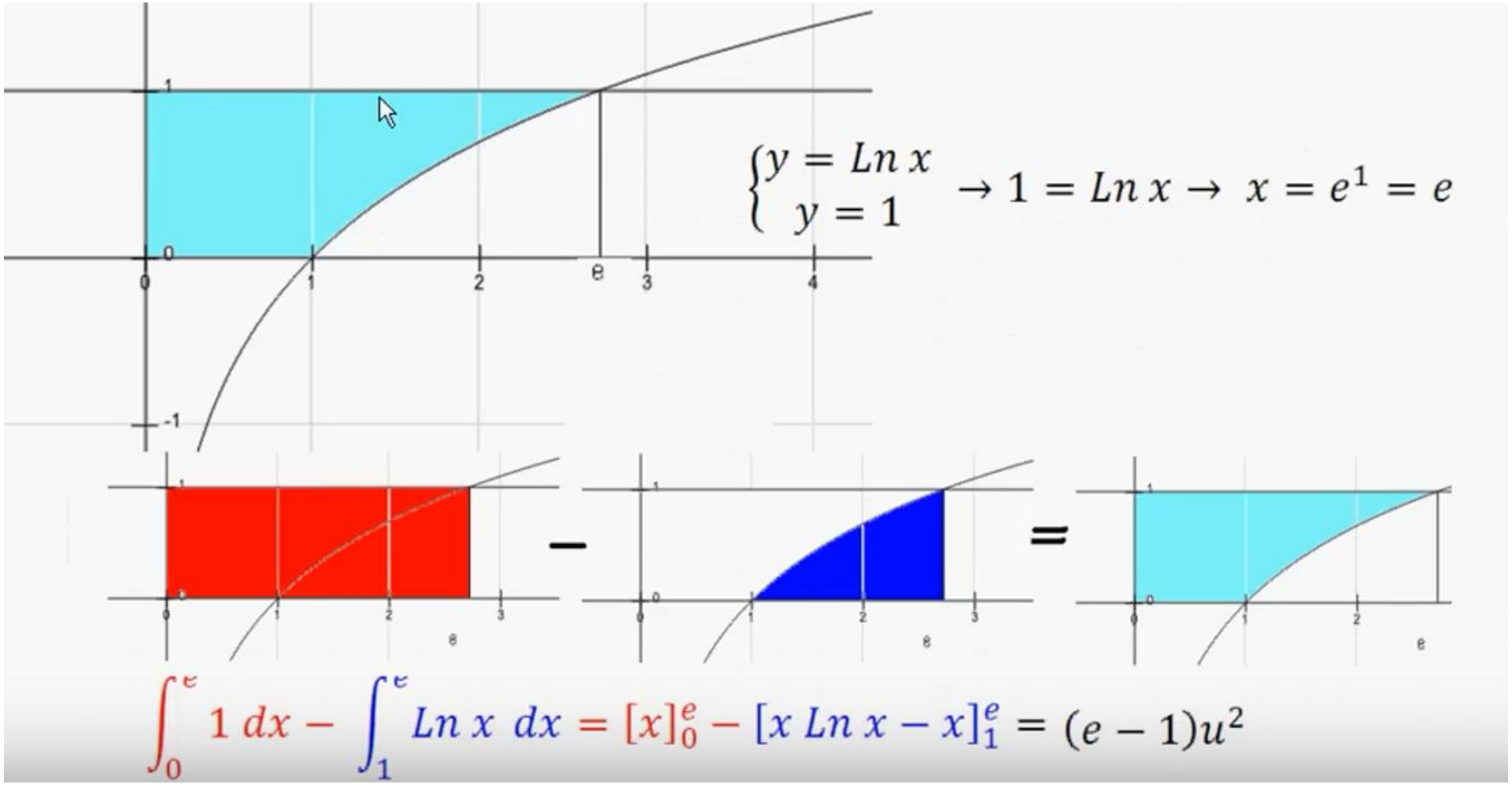
3) Azalera

$$A=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 (2x-x^2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{0}{2}+\left(2^2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(1^2-\frac{1^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+3-\frac{7}{3}=\boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

14. ADIBIDEA
Kalkulatu y=Lnx , y = 1   eta ardatz kartesiarrak lehenengo koadrantean mugatzen daben azalera



6.2 ARIKETA:AZALERA AZALERA FUNTZIOEN ARTEAN

15 Kalkulatu honako kasu hauetako bakoitzean emandako kurben artean mugaturiko azalera:

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x;\ y = x$

Bien arteko aldea: y=(x³-3x²+3x)-x =x³-3x²+2x

$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)=0$

Azalera=$\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx + \left(-\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx\right) = \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx - \int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx =$

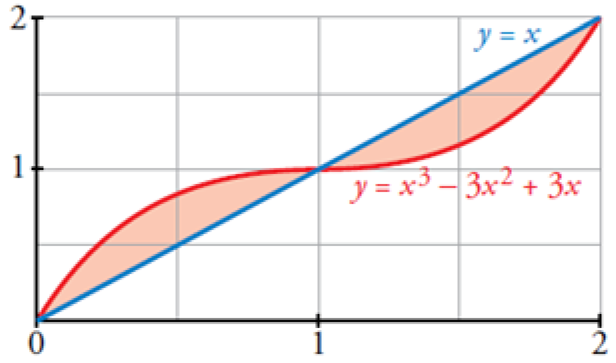
=1/4 –(-1/4)=**1/2 u²**

$G(x)=\int (x^3-3x^2+2x)dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + k$

G(0)=0 G(1)=1/4 G(2)=0

$\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx =$ G(1)-G(0)=1/4

$\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx =$ G(2)-G(1)=-1/4



15 c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

$y = x$

1.) EBAKIDURA PUNTUAK

$f(x) = g(x)$

$x^3 - 3x^2 + 3x = x$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

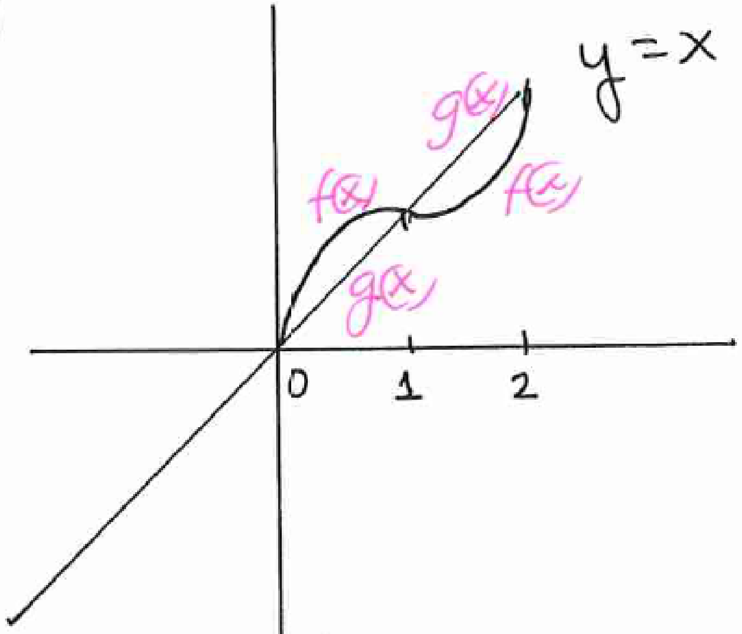
$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \boxed{x_1 = 2} \\ \boxed{x_2 = 1} \end{cases}$$

$\boxed{x_3 = 0}$

InDikopena

x	f(x)		g(x)
0,5	0,875	>	0,5
1.5	1,125	<	1,5



15 c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

$y = x$

Azalera

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(x^3 - 3x^2 + 3x) - x\right]dx + \int_1^2 \left[x - (x^3 - 3x^2 + 3x)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{1}{4} - \cancel{1} + \cancel{1}\right) - (0) + \left(-\frac{16}{4} + 2^3 - 2^2\right) - \left(-\frac{1}{4} + \cancel{1} - \cancel{1}\right) =$$

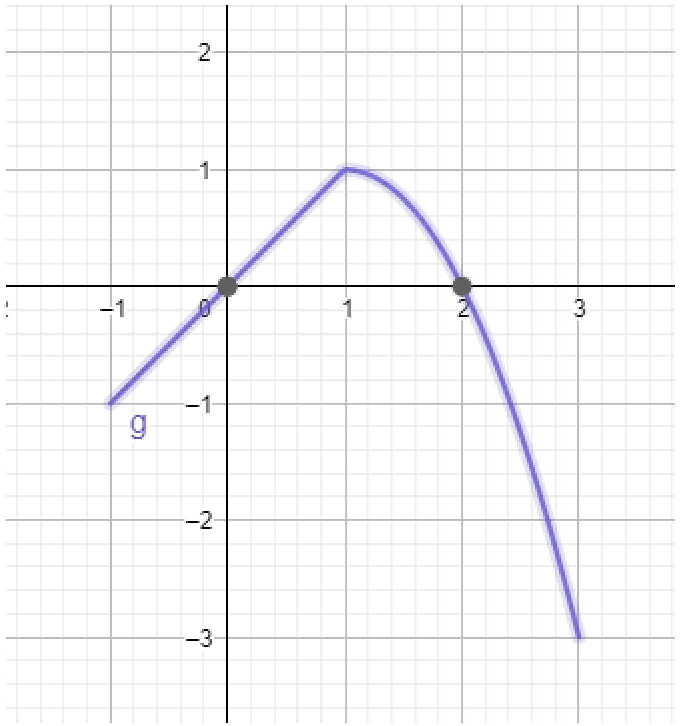
$$\frac{1}{4} - \cancel{4} + \cancel{8} - \cancel{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}\,u^2}$$

ZATIKA DEFINITUTAKO INTEGRALA

X ardatzak x=-1 eta x=3 zuzenek mugatutako azalera.

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 2x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_{-1}^{0} x dx \right| + \int_{0}^{1} x dx + \int_{1}^{2} (-x^2 + 2x) dx + \left| \int_{2}^{3} (-x^2 + 2x) = \right|$$



SELEKTIBITATEA

2022 EKAINA

B4 Ariketa

Marraztu $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ funtzioen grafikoek eta $y = e$ zuzen horizontalak mugatzen duten eremua, eta kalkulatu eremu horren azalera.

EBAU - 2022 EKAINA - $\boxed{B4}$

$f(x) = e^x$

$g(x) = e^{-x}$

$h(x) = y = e.$

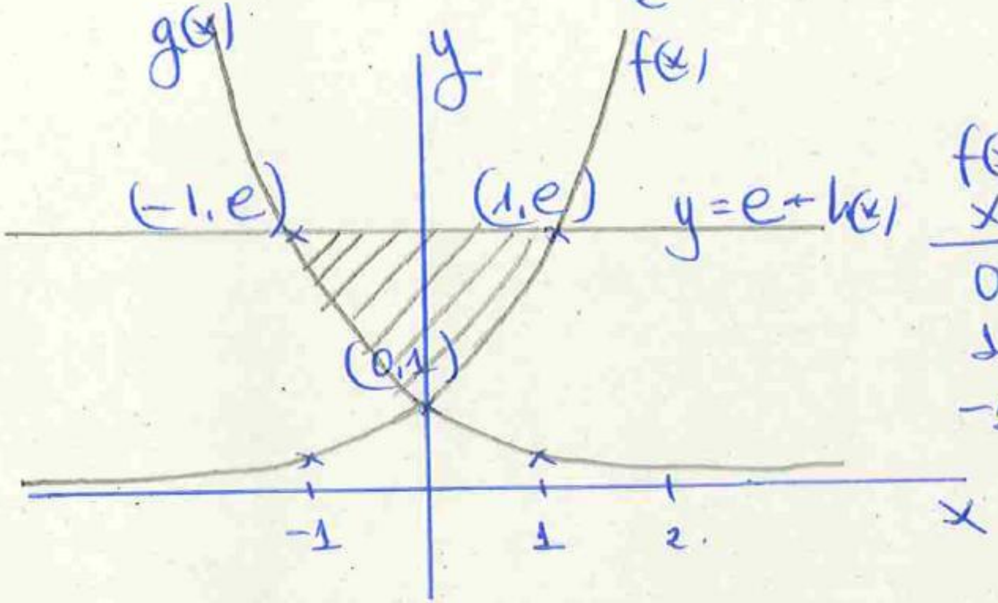
Bi funtzioen ebaketa puntua.

$e^x = e^{-x}$ $\qquad$ $e^{x+x} = 1$

$\frac{e^x}{e^{-x}} = 1$ $\qquad$ $2x = 0$

$x = 0 . \quad y = 1$

$P(0,1).$

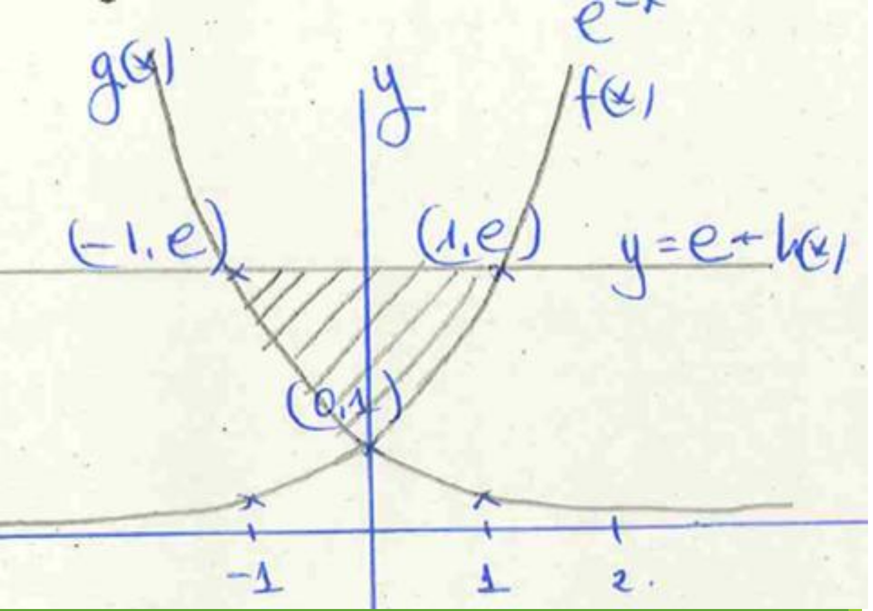


f(x)

x	y
0	1
1	$e = 2{,}7$
-1	$e^{-1} = 0{,}37$

g(x)

x	y
0	1
1	$e^{-1} = 0{,}37$
-1	$e = 2{,}7$



$$A = \int_{-1}^{0} (h(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (h(x) - f(x))\,dx$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (h(x) - g(x))\,dx = \boxed{2\int_{0}^{1} (h(x) - f(x))\,dx}$$

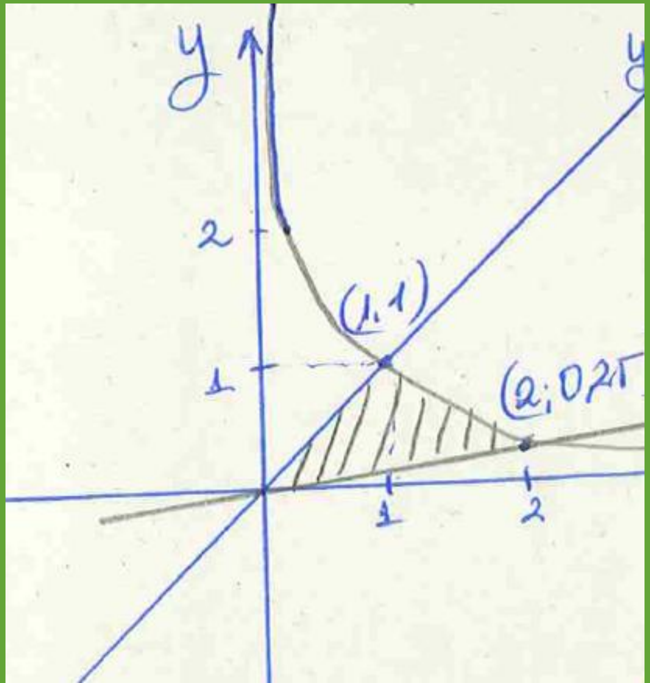
$$A = 2\int_{0}^{1} (h(x) - f(x))\,dx = 2\int_{0}^{1} (e - e^{x})\,dx =$$

$$= 2\left[ex - e^{x}\Big|_{0}^{1}\right] = 2\left[(\cancel{e} - \cancel{e}) - (0 - e^{0})\right] =$$

$$= 2 \cdot 1 = \boxed{2\ u^2}$$

SELEKTIBITATEA

2022 UZTAILA



B4 Ariketa

Marraztu $f(x) = x$, $g(x) = x/8$ eta $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ funtzioen grafikoek lehen koadrantean mugatzen duten eremua eta kalkulatu eremu horren azalera.

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^2 (h(x) - g(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{7x}{8}\,dx + \int_1^2 \left(x^{-2} - \frac{x}{8}\right)dx =$$

$$= \frac{7}{8}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left.\underbrace{\frac{x^{-1}}{-1}}_{-\frac{1}{x}} - \frac{x^2}{16}\right|_1^2 = \frac{7}{16} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{16}\right) - \left(-1 - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{7}{16} + \frac{-8-4}{16} - \frac{-16-1}{16} = \frac{7}{16} + \frac{-12}{16} + \frac{17}{16} = \frac{7-12+17}{16} = \frac{12}{16}$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}\,u^2}$$